

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE - SIMPLEX

ZMESOVÁ ÚLOHA

Zadanie:

Farmár chová na farme dobytok. Pre jeho výkrm potrebuje nakúpiť potrebné množstvo z troch ponúkaných polotovarov P1, P2, P3, ktoré nakoniec zmieša a pripraví výslednú dávku kŕmnej zmesi. Tá by mala obsahovať aspoň 5 kg bielkovín, 7 kg sacharidov, 3,5 kg tukov a 4,075 g vitamínu C. V jednom kilograme P1 sa nachádza 380 g bielkovín, 240 g sacharidov, 200 g tukov a 98 miligramov vitamínu C. Jeden kilogram polotovaru P2 obsahuje 180 g bielkovín, 320 g sacharidov, 150 g tukov a 196 miligramov vitamínu C. Polotovar P3 v jednom kilograme obsahuje 110 g bielkovín, 220 g sacharidov, 400 g tukov a 55 miligramov vitamínu C. Ceny za jeden kilogram polotovarov P1, P2 a P3 sú 4,3 €, 3,2 € a 3,7 €. Úlohou je zistiť, aké množstvá jednotlivých polotovarov má farmár zmiešať, aby dosiahol zmes s požadovanými parametrami a zároveň boli náklady, čo najmenšie.

MATEMATIZÁCIA SLOVNEJ ÚLOHY

potrebuje množstvá troch polotovarov, čiže premenné:

x_1 – koľko potrebuje polotovaru P1

x_2 – koľko potrebuje polotovaru P2

x_3 – koľko potrebuje polotovaru P3

Ďalej máme v každej zmesi bielkoviny, sacharidy, tuky a vitamíny. Zároveň tam sú na tieto zložky obmedzenia.

Napríklad – bielkoviny:

v zadaní je: *Tá (kŕmna zmes) by mala obsahovať aspoň 5 kg bielkovín, 7 kg sacharidov, 3,5 kg tukov a 4,075 g vitamínu C. V jednom kilograme P1 sa nachádza 380 g bielkovín, 240 g sacharidov, 200 g tukov a 98 miligramov vitamínu C. Jeden kilogram polotovaru P2 obsahuje 180 g bielkovín, 320 g sacharidov, 150 g tukov a 196 miligramov vitamínu C. Polotovar P3 v jednom kilograme obsahuje 110 g bielkovín, 220 g sacharidov, 400 g tukov a 55 miligramov vitamínu C.*

Celkovo potrebujeme do zmesi aspoň 5 000 gramov bielkovín (premeniť na gramy!). Ak zoberieme x_1 kilogramov polotovaru P1, v zmesi bude $380 \cdot x_1$ gramov bielkovín. Podobne z polotovaru P2 bude v zmesi $180 \cdot x_2$ gramov bielkovín a z x_3 kilogramov polotovaru P3 bude v zmesi $110 \cdot x_3$ gramov bielkovín.

Potrebujeme aspoň 5000, teda podmienka je:

$$380x_1 + 180x_2 + 110x_3 \geq 5000$$

Podobne vytvoríme podmienku pre sacharidy, tuky, vitamín. Prehľadnejšie je to v tabuľke.

Do posledného riadku dám ceny.

látka	P1 v 1 kilograme je	P2 v 1 kilograme je	P3 v 1 kilograme je	požadované množstvo (obmedzenie)
bielkoviny (g)	380 g	180 g	110 g	5000 g
sacharidy (g)	240 g	320 g	220 g	7000 g
tuky (g)	200 g	150 g	400 g	3500 g
vitamín c (mg)	98 mg	196 mg	55 g	4075 mg
cena (€)	4,3	3,2	3,7	

Takže z tabuľky po riadkoch vypíšem nerovnice. Vo výslednej zmesi musí byť minimálne príslušný počet gramov, teda môže byť aj väčší. Teda máme podmienky:

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 \geq 5000$$

$$240 x_1 + 320 x_2 + 220 x_3 \geq 7000$$

$$200 x_1 + 150 x_2 + 400 x_3 \geq 3500$$

$$98 x_1 + 196 x_2 + 55 x_3 \geq 4075$$

Samozrejme počty kilogramov jednotlivých P1, P2, P3 nemôžu byť záporné. Teda máme aj podmienky na nenulovosť:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

A celkovú cenu za polotovary vypočítam ako príslušné ceny krát počet toho polotovaru:

$$z = 4,3 x_1 + 3,2 x_2 + 3,7 x_3$$

cenu sa snažím minimalizovať.

Teda výsledný zápis slovnej úlohy formálne je:

$$z = 4,3 x_1 + 3,2 x_2 + 3,7 x_3 \rightarrow \min$$

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 \geq 5000$$

$$240 x_1 + 320 x_2 + 220 x_3 \geq 7000$$

$$200 x_1 + 150 x_2 + 400 x_3 \geq 3500$$

$$98 x_1 + 196 x_2 + 55 x_3 \geq 4075$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

KANONICKÝ TVAR

Úprava do kanonického tvaru spočíva v tom, že nerovnice zmeníme na rovnice.

V nerovniciach typu „ \geq “ v podstate pripúšťame aj nadbytku. Tento nadbytok vyjadruje prídavná premenná.

Teda namiesto nerovnice

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 \geq 5000$$

napišeme:

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 - x_4 = 5000$$

pričom x_4 je prídavná premenná (dávame ďalší index v poradí)

Avšak na začiatku nastavujeme prípustné riešenie tak, že x_1 až x_3 nastavíme na 0, potom

$0 + 0 + 0 - x_4 = 5000$ $x_4 = -5000$, teda záporné číslo, čo nie je prípustné. Všetky hodnoty premenných však musia byť počas celého výpočtu kladné alebo nula. Preto pridáme do rovnice ešte umelú premennú. Teda rovnica bude vyzerat':

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 - x_4 + u_1 = 5000$$

Tu už dáme iné označenie „ u “, lebo pridali sme umelú premennú. To len kvôli tomu, aby sme na začiatku mohli nastaviť nezáporné hodnoty všetkých premenných. Teda počiatočné nastavenie je:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, u_1 = 5000$$

teda každú nerovnicu upravíme na rovnicu rovnakým spôsobom, lebo všetky sú typu „ \geq “ (odčítame prídavnú premennú a pripočítame umelú):

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 \geq 5000 \quad \rightarrow \quad 380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 - x_4 + u_1 = 5000$$

Takto upraviť všetky nerovnice, v každej bude iná prídavná aj umelá.

Okrem toho upravíme aj účelovú funkciu. Len ekvivalentnou úpravou prehodíme pravú stranu doľava, aby napravo bola nula.

Kanonický tvar:

$$z - 4,3 x_1 - 3,2 x_2 - 3,7 x_3 = 0 \rightarrow \min$$

$$380 x_1 + 180 x_2 + 110 x_3 - x_4 + u_1 = 5000$$

$$240 x_1 + 320 x_2 + 220 x_3 - x_5 + u_2 = 7000$$

$$200 x_1 + 150 x_2 + 400 x_3 - x_6 + u_3 = 3500$$

$$98 x_1 + 196 x_2 + 55 x_3 - x_7 + u_4 = 4075$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Viac materiálov nájdete na stránke:

hodinovaucitelka.sk