DVOJFÁZOVÝ SIMPLEX

ZADANIE

Je daná úloha lineárneho programovania:
Vypočítajte minimum funkcie z = 7x4 – 9x5 za podmienok
x1 + 2x4 + x5 = 3
x3 – x4 + 2x5 = 6
x2 + x5 = 5
x1, x2, ... x5 ≥ 0
Určte, či riešenie X = (0, 2, 0, 0, 3) je prípustným bázickým riešením danej úlohy LP. Svoje tvrdenie odôvodnite.

RIEŠENIE

Keďže ide o rovnosti, do každého riadku pridáme umelú premennú:
x1 + 2x4 + x5 + p1 = 3
x3 – x4 + 2x5 + p2 = 6
x2 + x5 + p3 = 5
zapíšeme do matice / tabuľky:

pravá strana	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3
3	1	0	0	2	1	1	0	0
6	0	0	1	-1	2	0	1	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1

upravíme minimalizačnú funkciu na tvar:
0 = z – 7x4 + 9x5 + omega.p1 + omega.p2 + omega.p3
dopíšeme do tabuľky:

0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega
pravá strana	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3
3	1	0	0	2	1	1	0	0
6	0	0	1	-1	2	0	1	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1

doplníme premenné naľavo od tabuľky, na začiatku tam vždy budú umelé alebo prídavné premenné so svojím koeficientom v minimalizačnej funkcii:

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3
p1	omega	3	1	0	0	2	1	1	0	0
p2	omega	6	0	0	1	-1	2	0	1	0
p3	omega	5	0	1	0	0	1	0	0	1

Týmto máme jedno bázické riešenie, ktoré nie je optimálne. A síce:
(x1, x2, x3, x4, x5, p1, p2, p3) = (0, 0, 0, 0, 0, 3, 6, 5), ktoré keď dosadíme rovníc, tak to sedí. Avšak minimalizačná funkcia z = 0.

1. fáza

Teraz nastupuje prvá fáza simplexu, počas ktorej sa musia odstrániť všetky umelé premenné, nahradia sa premennými x1 až x5. Takže na konci tabuľky budem spočítavať hodnoty v riadkoch omega

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3
p1	omega	3	1	0	0	2	1	1	0	0
p2	omega	6	0	0	1	-1	2	0	1	0
p3	omega	5	0	1	0	0	1	0	0	1
	omega	3+6+5= 14	1+0+0= 1	0+0+1= 1	0+1+0= 1	2+(- 1)+0=1	1+2+1= 4	1+0+0= 1	0+1+0= 1	0+0+1= 1

V poslednom riadku nájdem maximálnu kladnú hodnotu. Je to 4 v stĺpci pre x5. teda x5 bude vstupujúca premenná. To, ktorá premenná bude vystupujúca, určím podľa podielu pravej strany a stĺpca pre x5

		0	0	0	0	-7	**9**	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	**x5**	p1	p2	p3	
p1	ω	**3**	1	0	0	2	**1**	1	0	0	3/1=3
p2	ω	**6**	0	0	1	-1	**2**	0	1	0	6/2=3
p3	ω	**5**	0	1	0	0	**1**	0	0	1	5/1=5
	ω	**14**	1	1	1	1	**4**	1	1	1	

Hľadám najmenší kladný podiel. Sú dva, takže vyberiem napr. prvý. Teda p1 bude vystupujúcou premennou. Nahradí ju x5 aj s koeficientom 9.

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	6	0	0	1	-1	2	0	1	0	
p3	ω	5	0	1	0	0	1	0	0	1	
	ω										

Prepočítam čísla v tabuľke, aby na vodiacom mieste bola 1 a pod ňou 0. Jednotka tam bola, teda len opíšem.

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω										
p3	ω										
	ω										

Nulu v druhom riadku vyrobím maticovými ekvivalentnými úpravami: k druhému riadku pripočítam (-2) násobok prvého riadku

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	6+(-2).3= 0	0+(-2).1= -2	0+(-2).0= 0	1+(-2).0= 1	-5	0	-2	1	0	
p3	ω										
	ω										

Nulu v treťom riadku vyrobím maticovými ekvivaletnými úpravami: k tretiemu riadku pripočítam (-1) násobok prvého riadku, teda de facto ho odpočítam:

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel

		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	0	-2	0	1	-5	0	-2	1	0	
p3	ω	5-3 = 2	0-1 = -1	1-0 = 1	0-0 = 0	-2	0	-1	0	1	
	ω										

Vypočítam omegu = spočítam riadky, kde je omega:

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	0	-2	0	1	-5	0	-2	1	0	
p3	ω	2	-1	1	0	-2	0	-1	0	1	
	ω	0+2 = 5	-2+-1= -3	0+1= 1	1+0= 1	-5+-2= -7	0+0= 0	-2+-1= -3	1+0= 1	0+1= 1	

Máme nové bázické riešenie, ktoré vyhovuje sústave rovníc, ale účelová funkcia ešte nie je asi minimálna.
(x1, x2, x3, x4, x5, p1, p2, p3) = (0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 2),
z = 7.0-9.3 = -27

Ďalšia iterácia: Znova v riadku omega hľadáme max. kladnú hodnotu. je ich viac, je jedno ktorú si vyberiem, ale nie umelú.

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	0	-2	0	1	-5	0	-2	1	0	
p3	ω	2	-1	1	0	-2	0	-1	0	1	
	ω	5	-3	**1**	**1**	-7	0	-3	1	1	

Vyberieme napr. stĺpec pre x2 a preň vyrátame podiely

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	3/0 = ∞
p2	ω	0	-2	0	1	-5	0	-2	1	0	0/0 =∞
p3	ω	2	-1	**1**	0	-2	0	-1	0	1	2/1 = 2
	ω	5	-3	**1**	1	-7	0	-3	1	1	

Teda vstupujúca je x2, vystupujúca p3. Jednotka je na svojom mieste, nad ňou sú nuly, takže hodnoty len odpíšem

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	0	-2	0	1	-5	0	-2	1	0	
x2	0	2	-1	**1**	0	-2	0	-1	0	1	
	ω										

Máme nové bázické riešenie, ktoré vyhovuje sústave rovníc, ale účelová funkcia ešte nie je minimálna.
(x1, x2, x3, x4, x5, p1, p2, p3) = (0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0),
z = 7.0-9.3 = -27
Vypočítam omegu, v podstate len odpísať riadok pre p2:

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
p2	ω	0	-2	0	1	-5	0	-2	1	0	
x2	0	2	-1	1	0	-2	0	-1	0	1	
	ω	2	-2	0	**1**	-5	0	-2	1	0	

Teraz sa využije tá druhá jednotka v spodnom riadku, je to max. kladná hodnota. Vypočítam podiely

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	3/0
p2	ω	0	-2	0	**1**	-5	0	-2	1	0	0/1
x2	0	2	-1	1	0	-2	0	-1	0	1	2/0
	ω	2	-2	0	**1**	-5	0	-2	1	0	

Vstupujúci prvok je x3, vystupujúca p2. Zasa máme situáciu, že na príslušnom mieste je 1 a na ostatných 0. Takže hodnoty sa len odpíšu. Už nemáme riadok omega, takže bude 2. fáza.

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
x3	0	0	-2	0	**1**	-5	0	-2	1	0	
x2	0	2	-1	1	0	-2	0	-1	0	1	

Máme nové bázické riešenie, ktoré vyhovuje sústave rovníc, ale účelová funkcia ešte nie je asi minimálna.
(x1, x2, x3, x4, x5, p1, p2, p3) = (0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0), v podstate je rovnaké s predch.
z = 7.0-9.3 = -27

2. fáza

		0	0	0	0	-7	9	omega	omega	omega	podiel
		p.s.	x1	x2	x3	x4	x5	p1	p2	p3	
x5	**9**	3	1	0	0	2	1	1	0	0	
x3	0	0	-2	0	**1**	-5	0	-2	1	0	
x2	0	2	-1	1	0	-2	0	-1	0	1	
	cij	9.3+0.0+0.2-0= 27	9.1+0.-2+0.-1-0= 9	9.0+0.0+0.-1= 0	9.0+0.1+0.0-0= 0	9.2+0.-5+0.-2--7= 25	9.1+0.0+0.0-9= 0				

Keďže hľadám minimálnu účelovú funkciu, hľadám minimálny záporný koeficient. Taký tu nie je, koniec. Posledne uvedené riešenie je optimálne