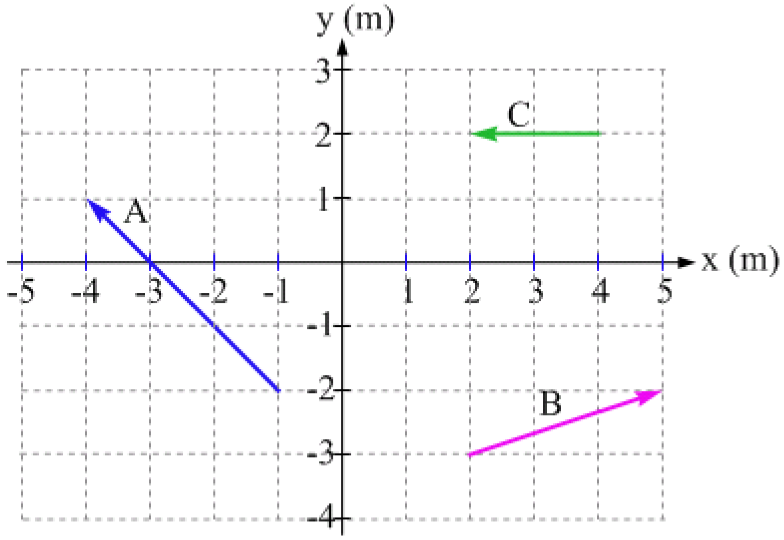
ZBIERKA ÚLOH Z EXTERNEJ MATURITY

Obsah

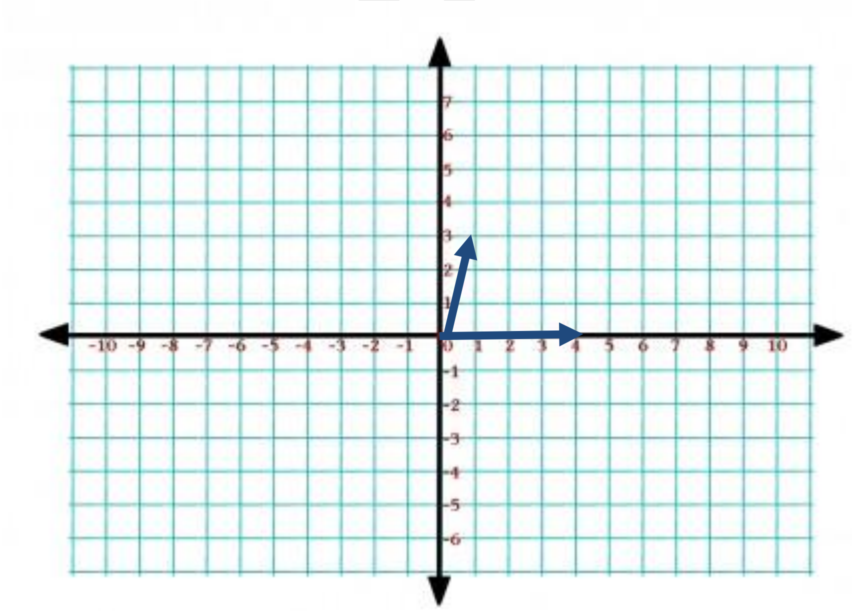
VEKTORY

1. Zapíšte súradnice zobrazených vektorov.



2. Graficky aj numericky zistite:

   $\vec{w} = 2\vec{a} + \vec{b}$ $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b}$ $\vec{w} = \vec{a} - 2\vec{b}$



3. Aké sú súradnice bodu L, ak $\vec{w} = \overrightarrow{KL}$ a bod K má súradnice [2,2]?

4. Aké budú súradnice N, ak $\overrightarrow{MN}$ ‖ $\vec{a}$, M = [-1; 5] a |MN| = 2. $|\vec{a}|$

5. Lineárna kombinácia vektorov: https://www.geogebra.org/m/sxMwsWhw

6. Dané sú vektory $\vec{a} = (-3\,;1)$, $\vec{b} = (-2\,;m)$. Určte druhú súradnicu m vektora $\vec{b}$ tak, aby $\vec{a}.\vec{b} = 3$. (2009/2)

7. Dané sú body *A, B*. Nájdite bod *M* na osi *x* tak, aby $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

   a) *A*[0, 1], *B*[5, -6] b) *A*[0, 1, 3], *B*[−5, 3, −3]

Riešenie:

m_1 = 6, m_2 = -1

8. Zistite, či tri body ležia na jednej priamke:

   A[-3, 2], B[-7, -4], C[-1, 5]

   A[4, 5], B[-2, 8], C[7, -1]

   A[3, -2, 4], B[7, 0, -2], C[1, -3, 7]

   A[7, -1, 3], B[5, 2, 2], C[1, 8, 1]

Riešenie:

a)body A, B, C ležia na jednej priamke
c)body A, B, C ležia na jednej priamke

9. Rozhodnite, či body *A, B, C, D* ležia v rovine alebo na priamke:

   a) A[2, −5, −7], B[−1, 1, 2], C[1, −3, −4], D[−3, 5, 8]

   b) A[1, −2, 3], B[1, −2, 4], C[3, −1, 4], D[2, −1, 4]

   c) A[1, −2, 3], B[2, 1, 8], C[2, 1, 1], D[−2, −11, 9]

10. Vypočítajte uhol α v trojuholníku ABC. A [0; 1] B [-1; 2] C [1; 3]

11. Vektorový súčin:

    a) Určte vektor, ktorý je kolmý na oba vektory: $\vec{u} = (1;\ -1;\ 2)$ a $\vec{v} = (3\,;1\,;1)$ a zároveň má veľkosť 10.

Riešenie:

$\vec{z} = \left(-3\sqrt{2}\,;5\sqrt{2}\,;4\sqrt{2}\right)$

LINEÁRNE ÚTVARY

12. Daný je pravidelný šesťuholník ABCDEF. Bod A má súradnice [1 ; 3] a bod D má súradnice [4 ; 7]. Vypočítajte súčet súradníc stredu jeho opísanej kružnice.; (2019/1)

Riešenie: 7,5

13. Dané sú body A[8; 1] a B [6;5]. Určte:

    parametrické vyjadrenie priamky AB / polpriamky AB / úsečky

    všeobecná rovnica priamky

    smernicový tvar priamky

    smerový vektor

normálový vektor

smernica

os úsečky

veľkosť uhla priamky s osou x

<u>*Riešenie:*</u>

a) x = 8 – 2k
y = 1 + 4k   *k patrí R,*   *k patrí R0+,*   *k patrí <0; 1>*
b) 2x + y – 17 = 0
c) y = -2x + 17
g) S = A+B/2 = [7; 3]
os o: normálový = (-2 ; 4) x – 2y – 1 = 0
h) vektory: (-1; 2) a (1; 0) uhol: cos alfa = |-1/sqrt(5)|

14. Zistite uhol dvoch vektorov: $\vec{a} = (3\ ;\ 1)\ \vec{b} = \ (-2\ ; 3)$

15. Zistite uhol dvoch priamok zadaných bodom a smerovým vektorom:

priamka *a*:	A = [6 ; -1]	$\vec{u} = (3\ ;\ 1)$
priamka *b*:	B = [2 ; 2]	$\vec{v} = \ (-2\ ; 3)$

16. Aký je rozdiel medzi uhlom vektorov a uhlom priamok, ktoré majú tieto smerové vektory?

17. Tri z uvedených bodov ležia na jednej priamke. Ktorý bod na nej neleží? (fri 2016/47)

A[1; 3]   B[– 1; – 6]   C[0; – 3]   D[– 2; – 15]

18. Určte smernicu priamky, ktorá prechádza bodmi *A* [3; 0] a *B* [4; 2]. (2010/4)

<u>Riešenie: k = 2</u>

19. Dané sú body A [2; 2] a B [4; 10] . Určte smernicu osi úsečky AB. (2014/25)

(A) -4   (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4   (E) $\frac{27}{4}$

<u>*Riešenie: B*</u>

20. Ktorá z uvedených priamok je kolmá na priamku *p:* 2*x* – 3*y* – 8 = 0? (fri 2016/48)

(A) *a:* 2*x* – 3*y* + 3 = 0   (B) *b:* 2*x* + 3*y* – 3 = 0

(C) *c:* 3*x* + 2*y* – 2 = 0   (D) *d:* 3*x* – 2*y* + 2 = 0

21. V trojuholníku ABC výška na stranu *a* leží na priamke určenej rovnicou 4x + 5y + 7 = 0. Stred strany *a* je bod S [5; 2]. Určte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží strana *a* trojuholníka ABC. (2012/26)

(A) 4x + 5y = 0   (B) 4x + 5y – 30 = 0

(C) 5x + 4y – 33 = 0   (D) 5x – 4y – 17 = 0

(E) 5x – 4y + 10 = 0

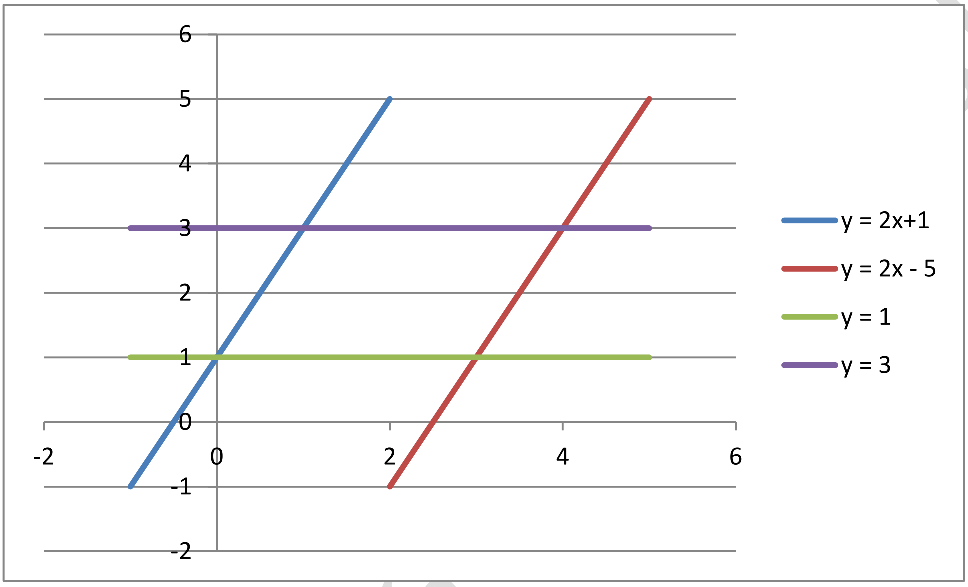
<u>*Riešenie: D*</u>

22. Daná je priamka, ktorá prechádza bodmi A [– 3; 22] a B [33; – 2]. Určte počet všetkých bodov tejto priamky, ktorých obidve súradnice sú kladné celé čísla. (2011/30)

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

23. Daná je priamka p určená rovnicou $y = \frac{7}{2}x + 2012$. Vypočítajte v stupňoch veľkosť uhla priamky p s osou y. (2012/10)

24. Dva páry rovnobežných priamok sú určené rovnicami $y = 2x + 1$, $y = 2x - 5$ a $y = 1$, $y = 3$. Vypočítajte obsah rovnobežníka, ktorý ohraničujú tieto štyri priamky. (2010/13)



Riešenie: 3

25. Dané sú priamky určené rovnicami 2x + 3y – 18 = 0 a 3x – y – 5 = 0. Určte vzdialenosť priesečníka daných priamok od začiatku súradnicovej sústavy [0;0]. (2011/15)

26. Body A [– 2; 6] a B [– 4; – 2] sú vrcholy rovnobežníka ABCD, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode S [0; 0] . Určte súradnice vrcholov C a D. Do odpoveďového hárka zapíšte aritmetický priemer všetkých súradníc bodov C a D. (2009/17)

27. Bod A je priesečník troch rovín α : 3x + y + z = – 12, β: 7x – y – z = 2 a γ: z = 0. Nájdite súradnice bodu A. Do odpoveďového hárku napíšte súčet súradníc bodu A. (2008A/17)

28. Vypočítajte vzdialenosť bodu A[0;1] od priamky 3x - 4y + 2 = 0. (2008A/21, 2008B/28)

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 1

29. Ktorá z nasledujúcich priamok je kolmá na priamku 2x + y + 1 = 0 a prechádza bodom A[4 ; 0]. (2008B/25)

(A) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (B) $y = \frac{1}{2}x - 2$

(C) $y = -2x + 8$ (D) $y = 2x - 8$

(E) $y = \frac{1}{2}x + 2$

30. Pre akú hodnotu $\boldsymbol{a}$ sú priamky $p: \boldsymbol{a}x - 6y + 2 = 0$ a $q: 3x + 8y + \boldsymbol{a} = 0$ navzájom kolmé? (2005A/11)

31. Jednu základňu lichobežníka ABCD tvoria body A[2 ; 4] a B[3 ; 6], druhú body C[1; 5] a D[e ; f]. Určte číslo e, ak viete, že $\overrightarrow{DC} = 2.\overrightarrow{AB}$. (2005A/16)

32. Akú veľkosť má uhol priamky p : $x = 1 + t$, $y = -2 + t$, $z = 2 - t$ ($t \in$R) a roviny $x - y - z - 7 = 0$? Výsledok uveďte s presnosťou na celé stupne. (2005A/18)

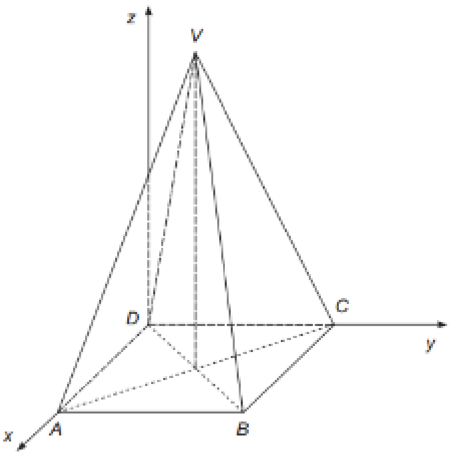
33. Priamka p je daná predpisom $y = \frac{1}{2}x - 1$. Priamka q je kolmá na priamku p a prechádza bodom A[1; 5]. Určte y-ovú súradnicu bodu, ktorý je priesečníkom priamky q s osou y.2017/16

34. Daná je kocka *ABCDEFGH*, jej hrany *AB*, *CD* ležia na priamkach *p*, *q* určených rovnicami *p:* $3x + 4y + 4 = 0$, *q:* $3x + 4y + 14 = 0$. Aký objem má táto kocka? (fri 2016/49)

    (A) 8 (B) 28 (C) 100 (D) 1000

35. Pravidelný ihlan ABCDV so štvorcovou podstavou je umiestnený v súradnicovej sústave tak, ako znázorňuje obrázok. Vrchol ihlana má súradnice V [2; 2; 6]. Určte vzdialenosť vrcholu D od stredu úsečky VB. (2014/28)

    (A) $3\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{11}$ (D) $\sqrt{11}$ (E) $2\sqrt{12}$



<u>Riešenie:</u>

$$d = 3\sqrt{3}$$

36. Kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku je určená rovnicou $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Určte dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka. (2014/18)

37. Vypočítajte polomer kružnice k určenej rovnicou $x^2 + y^2 - 24x + 10y = 0$. (2013/4)

Výsledok: 13

38. Určte všetky $p \in R$, pre ktoré kružnica k : $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 17 - p$ má aspoň jeden spoločný bod s osou x, ale nemá spoločný bod s osou y. (2012/23)

(A) $p \in \langle 1;4)$ (B) $p \in (1;16\rangle$ (C) $p \in (0;17\rangle$ (D) $p \in \langle 1;16)$ (E) $p \in \langle 1;16\rangle$

Riešenie: B

39. Určte kladnú hodnotu koeficientu q, pre ktorú má priamka daná rovnicou $y = 2x + q$ a kružnica určená rovnicou $x^2 + y^2 = 5$ práve jeden spoločný bod. (2010/18)

Riešenie: 5

40. Určte hodnoty koeficientov $a, b \in R$ tak, aby kružnica určená rovnicou $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ prechádzala bodmi A [– 2; 0] a B [1; –1] . Do odpoveďového hárka zapíšte súčet koeficientov $a + b$. (2009/3)

41. Daná je priamka p: $y = c$ a kružnica k: $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Určte všetky hodnoty parametra $c \in R$, pre ktoré nemá priamka p a kružnica k spoločný bod. (2008A/30)

(A) $c \in (2;\infty)$ (B) $c \in (-\infty; 2)$

(C) $c \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ (D) $c \in (-2; 2)$ (E) $c \in \{-2; 2\}$

Riešenie: C

42. Aká je vzájomná poloha kružníc $k : x^2 + y^2 = 625$ a $m : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 400$? (2004A/9)

(A) Kružnice *k, m* majú dva spoločné body.
(B) Kružnica *m* sa dotýka zvnútra kružnice *k*.
(C) Kružnica *k* sa dotýka zvnútra kružnice *m*.
(D) Kružnice *k* a *m* sa dotýkajú zvonku.
(E) Kružnice *k*, *m* nemajú spoločné body.

43. Rozhodnite o vzájomnej polohe priamky p: $x + 2 = 0$ a kružnice k: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$.

2015/27

(A) Priamka p je nesečnica kružnice k.
(B) Priamka p je dotyčnica kružnice k, rovnobežná s osou x.
(C) Priamka p je dotyčnica kružnice k, rovnobežná s osou y.
(D) Priamka p je sečnica kružnice k, rovnobežná s osou x.
(E) Priamka p je sečnica kružnice k, rovnobežná s osou y.

44. Akú dĺžka má tetiva, ktorú na kružnici p: $x^2 + y^2 = 20$ vytne priamka s rovnicou $y = -\frac{x}{2}$?(fri 2016/50)

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $4\sqrt{5}$ (C) $10\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$

45. Daná je kružnica $k: x^2 + y^2 = 9$ a priamka $p: y = 2x + 7$. Na kružnici k leží bod A a na priamke p bod B. Nájdite polohu bodov A a B tak, aby bola úsečka AB najkratšia možná. Zistite dĺžku tejto úsečky. (2019/20)

Riešenie: 0,13