

ZBIERKA ÚLOH Z EXTERNEJ MATURITY

Obsah

Zbierka úloh z externej maturity	1
7. Exponenciálne a logaritmické funkcie a rovnice	2
Exponenciálne funkcie a rovnice.....	2
Logaritmické funkcie a rovnice.....	8

7. EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE A ROVNICE

EXPONENCIÁLNE FUNKCIE A ROVNICE

1. Zobraz grafy (so základom e):

a) $f: y = 3 \cdot e^x$

b) $f: y = e^{x-4}$

c) $f: y = e^x + 5$

d) $f: y = -2 \cdot e^{x-4} + 1$

2. Načrtnite grafy (so základom väčším ako 1):

a) $f: y = 3 \cdot 2^x$

b) $f: y = 2^{x-4}$

c) $f: y = 2^x + 5$

d) $f: y = 3 \cdot 2^{x-4} - 2$

3. Načrtnite grafy (so základom medzi 0 a 1):

a) $f: y = 3 \cdot 0,5^x$

b) $f: y = 0,5^{x-4}$

c) $f: y = 0,5^x + 5$

d) $f: y = -2 \cdot 0,5^{x+3} + 1$

4. Bez kalkulačky (z grafu) určte, ktoré číselné výrazy sú kladné / záporné / rovné nule.

$2,8^0$

$(\sqrt{7})^{-2}$

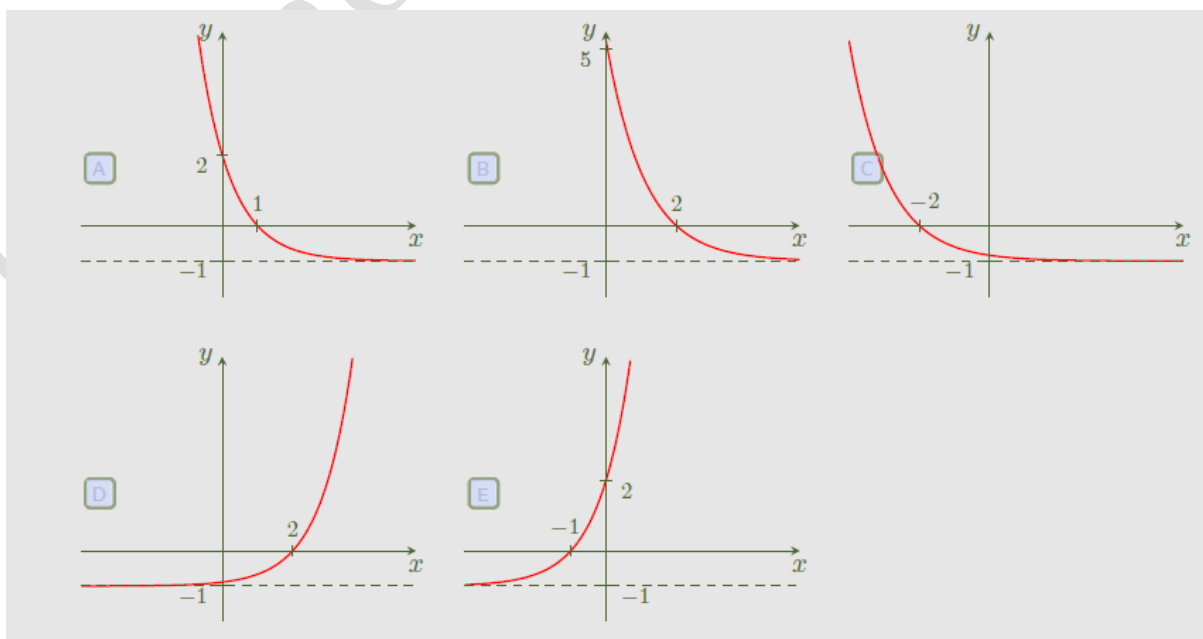
$\sqrt{11}^3$

$5,2^{-1,7}$

Poznámka:

v tomto cvičení si máme uvedomiť: **keď kladné číslo umocníme na hocijaku mocninu, je jedno, či kladnú alebo zápornú, VŽDY vyjde kladné číslo. Ved' preto je celý graf základnej exponenciálnej funkcie vždy nad osou x ! Dokonca aj umocnenie na nultú je viac ako nula, že?**

5. Ktorý z nasledujúcich grafov je grafom funkcie $f: y = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} - 1$?



6. Aké musí byť $a \in R - \{1\}$, aby platila nerovnosť:

a) $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{4}{5}}$ b) $a^{\frac{2}{7}} > a^{\frac{5}{7}}$ c) $a^{-\frac{7}{8}} > a^{\frac{9}{8}}$

7. Určte hodnoty parametra $p \in R$, pre ktorý je funkcia $f: y = \left(\frac{p+2}{p-5}\right)^x$ rastúca.

(A) $p \in R$

(B) $p \in R - \{5\}$

(C) $p \in (-\infty; -2) \cup (5; \infty)$

(D) $p \in (5; \infty)$

Riešenie: D

8. Funkcia $f: y = 3^x - 2$ je

(2005A/22)

(A) zdola ohraničená, zhora neohraničená a klesajúca.

(B) zdola ohraničená, zhora neohraničená a rastúca.

(C) zdola neohraničená, zhora ohraničená a klesajúca.

(D) zdola neohraničená, zhora ohraničená a rastúca.

(E) neohraničená zdola aj zhora a rastúca.

9. Je daná funkcia $f: y = 3 - 3^x$ (vid' obrázok). Z nasledujúcich tvrdení vyberte to, ktoré je nepravdivé.

(A) Funkcia nie je párna, ani nepárna.

(B) Obor hodnôt je $(\infty; 3)$.

(C) Funkcia je prostá.

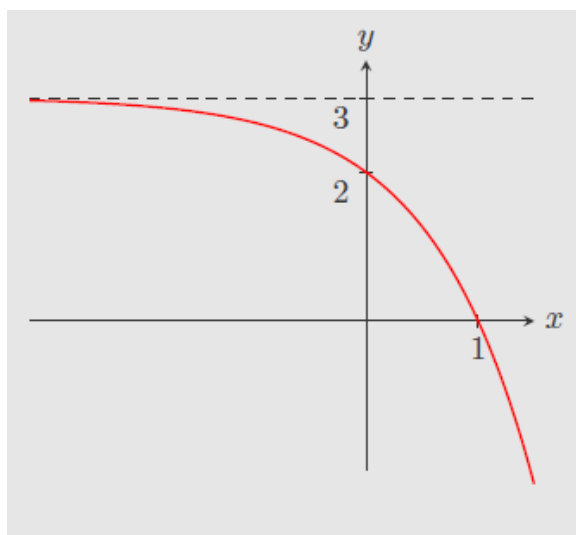
(D) Definičným oborom funkcie je $(-\infty; \infty)$.

(E) Funkcia je klesajúca na celom definičnom obore.

(F) Funkcia má všetky funkčné hodnoty menšie ako 3.

(G) Funkcia je zhora ohraničená, ale nie je ohraničená.

(H) Graf funkcie prechádza bodom $[2; -6]$.



Zdroj: http://msr.vsb.cz/funkce/exponencialni-funkce-rovnice-a-nerovnice/test_funkce_rovnice_exponencialni_782_37.pdf

Výsledok: B

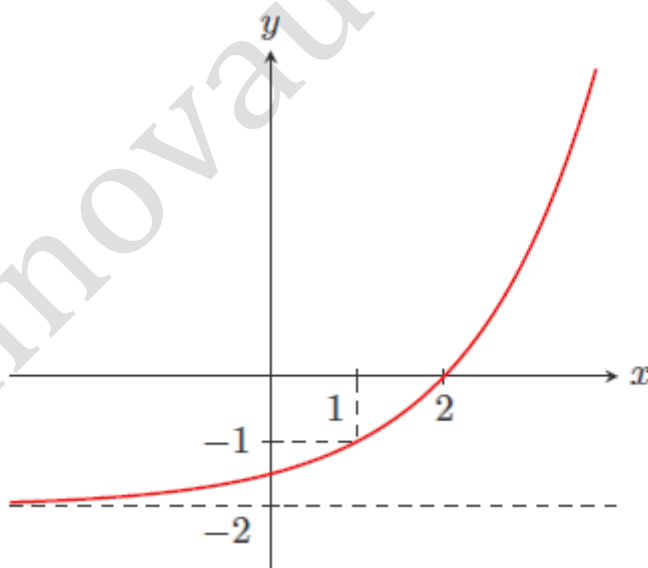
10. Určte predpis funkcie, ktorej graf je na obrázku

(A) $y = 2^{x-1} + 2$

(B) $y = 2^{x-1} - 2$

(C) $y = 2^{x+1} - 2$

(D) $y = 2^{x+1} + 2$



Zdroj: http://msr.vsb.cz/funkce/exponencialni-funkce-rovnice-a-nerovnice/test_funkce_rovnice_exponencialni_782_37.pdf

Výsledok: B

11. Aký predpis má funkcia, ktorá prechádza bodmi $[3 ; 0]$ a $[5 ; 3]$?

(A) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 1$

(B) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} + 1$

$$(C) f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} - 1$$

$$(D) f: y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$$

$$(E) f: y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$$

$$(F) f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 1$$

Zdroj: http://msr.vsb.cz/funkce/exponencialni-funkce-rovnice-a-nerovnice/test_funkce_rovnice_exponencialni_782_37.pdf

Výsledok: C

12. Ktorým bodom neprechádza funkcia $f: y = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

$$A = [-1; 0]$$

$$B = \left[1; \frac{8}{3}\right]$$

$$C = [-2; 6]$$

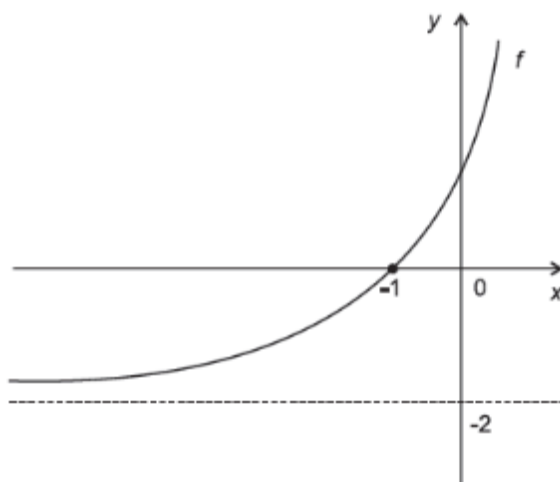
$$D = [0; 2]$$

$$E = [-3; -24]$$

$$F = \left[2; \frac{26}{9}\right]$$

Zdroj: http://msr.vsb.cz/funkce/exponencialni-funkce-rovnice-a-nerovnice/test_funkce_rovnice_exponencialni_782_37.pdf

13. Na obrázku je časť grafu funkcie $f: y = 2^{x+a} + b$, kde a, b sú neznáme reálne čísla. Akú hodnotu má súčin $a \cdot b$? (2009/26)



$$(A) -4$$

$$(B) -3$$

$$(C) 0$$

$$(D) 2$$

$$(E) 4$$

Výsledok: C

14. Načrtnite a vysvetlite, čím sa podobajú / líšia nasledujúce dvojice funkcií. Všimnite si rozdiely v predpise aj v grafe.

$$a) f: y = 2^x$$

$$g: y = 2^{-x}$$

$$b) f: y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

$$g: y = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$$

$$c) f: y = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$$

$$g: y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$$

$$d) f: y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

$$g: y = -\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Prečo sú grafy v c) zhodné?

15. Podľa akej osi sú súmerné dvojice grafov?

a) $f: y = 3^x$

$g: y = 3^{-x}$

b) $f: y = 3^x$

$g: y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f: y = 3^x$

$g: y = -3^x$

d) $f: y = 3^x$

$g: y = (-3)^x$

Posledná dvojica je taký chytáčik ;)

16. Je daná funkcia $f: y = (0,75)^x$. Aký predpis má funkcia g

a) symetrická s f podľa osi x

b) symetrická s f podľa osi y

c) symetrická s f podľa počiatku súradnicovej sústavy?

17. Aký predpis má funkcia symetrická podľa osi y s funkciou $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$? (fri 2016/28)

(A) $f^{-1}: y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

(B) $f^{-1}: y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

(C) $f^{-1}: y = -\left(\frac{2}{3}\right)^x$

(D) $f^{-1}: y = -\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

18. Aké súradnice majú priesečníky grafu funkcie $f: y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$ s osou x a osou y ? (fri 2017/29)

(A) P[-4 ; 0] R[0 ; 3,75]

(B) P[-4 ; 0] R[0 ; 2]

(C) P [1 ; 0] R [0 ; 3,75]

(D) P [1 ; 0] R[0 ; 2]

19. Daná je funkcia $f(x) = 2^{x+1}$. Určte, pre ktoré x sa funkčná hodnota funkcie f rovná 64.

(2010/8)

Riešenie: $64 = 2^{x+1}$

$2^6 = 2^{x+1}$

$x = 5$

20. Exponenciálna funkcia $f: y = a^x$ má v bode 2 hodnotu 0,04. Akú hodnotu má v bode -1?

21. Riešte rovnicu $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 20$.

(2016/4)

22. Na aké číslo treba zmeniť číslo 4 v rovnici $5^x = 4$, aby nová rovnica mala koreň o 3 väčší než pôvodná rovnica? (2004A/18)

23. Nájdite riešenie rovnice $4^{x-1} = 10$. Výsledok zapíšte s presnosťou na dve desatinné miesta.

24. Nájdite koreň rovnice $2^{x+3} = 3$. Výsledok zapíšte s presnosťou na dve desatinné miesta.

(2008B/6)

25. Nájdi koreň rovnice $2^{x+3} - 4 \cdot 2^x = \frac{1}{2}$

(2005A/8)

Riešenie: $x = -3$

26. Ktoré záporné číslo je koreňom rovnice $5^{|x|} = 125$?

27. Ktoré záporné číslo je koreňom rovnice $3^{|x|} = 9$?

(2005B/6)

LOGARITMICKÉ FUNKCIE A ROVNICE

1. Načrtni inverzné funkcie k funkciám:

a) $f: y = 3^x$

b) $g: y = 0,7^x$

Ako geometricky súvisia funkcia a jej inverzná funkcia?

Poznámka:

pripomeňme si, že funkcia a k nej inverzná sú navzájom osovo súmerné podľa osi prvého kvadrantu. Dobré je si taktiež uvedomiť, že sa mení definičný obor za obor hodnôt a naopak. Čo ďalej znamená: Základné exponenciálne funkcie sú nad osou y , teda y môže nadobúdať len kladnú hodnotu. A potom základné logaritmické funkcie sú napravo od osi x , teda x môže nadobúdať len kladnú hodnotu. Preto do základu logaritmu môžeme dať len kladné číslo, a preto robíme tzv. podmienky pri logaritmických výrazoch a rovniciach.

2. Vyjadri inverzné funkcie k funkciám v predchádzajúcej úlohe predpisom.

Poznámka:

pozmáme asi ten postup, že zameniť x za y a opačne, a potom dať y na ľavú stranu a vyjadriť ho. A tu práve si treba uvedomiť, že nijakým bežným spôsobom, t.j. spočítaním, odčítaním, násobením, delením, umocnením, odmocnením, nedokážeme vyjadriť y . Práve preto zavádzame nový typ operácie – logaritmovanie.

3. Zobraz grafy:

a) $f: y = 3 \cdot \log x$

b) $y = \log(x - 4)$

c) $y = \log x + 5$

d) $y = -2 \cdot \log(x - 4) + 1$

4. Zobraz grafy:

a) $f: y = 3 \cdot \log_{0,5} x$

b) $y = \log_{0,5}(x - 4)$

c) $y = \log_{0,5} x + 5$

d) $y = -2 \cdot \log_{0,5}(x - 4) + 1$

5. Prirodzený logaritmus $y = \ln x$ je logaritmus so základom $e = 2,71$. Aký má graf?

Poznámka:

len pripomenutie, že prirodzený logaritmus je logaritmus so základom e , ktorý je väčší ako 1. Teda graf je rastúci.

6. Funkcia $f: y = \log_{16} x - \frac{1}{2}$ nadobúda nulovú hodnotu pre (fri 2016/27)

(A) $x = 16$

(B) $x = 8$

(C) $x = 4$

(D) $x = 2$

7. Určite x -ovú súradnicu bodu, v ktorom graf funkcie $f: y = -7 \cdot \log(x + 3)$ pretína os x . (2015/12)

8. Rovnica $\log_2 x^3 - \log_2 x = 10$ v množine reálnych čísel (fri 2016/20)

(A) nemá korene

(B) má dva korene, ktorých súčet je 0

(C) má jeden koreň v intervale (20 ; 40)

(D) má jeden koreň v intervale (1000 ; 1040)

9. Rovnica $\log_x 64 - \log_x 8 = 3$ má v množine reálnych čísel jeden koreň, ktorý patrí do intervalu (fri 2017/20)

(A) $\langle 9, 12 \rangle$ (B) $\langle 6, 9 \rangle$ (C) $\langle 3, 6 \rangle$ (D) $\langle 1, 3 \rangle$

10. Aký predpis má inverzná funkcia f^{-1} k funkcii $f: y = 10^{x-1} + 1$? (2005B/27)

- (A) $f^{-1}: y = \log_{10}(x + 1) - 1$ (B) $f^{-1}: y = \log_{10}(x - 1) - 1$
(C) $f^{-1}: y = \log_{10} x + 1$ (D) $f^{-1}: y = \log_{10}(x + 1) + 1$
(E) $f^{-1}: y = \log_{10}(x - 1) + 1$

11. Daná je funkcia $f(x) = 2^x - 2$. Koľko spoločných bodov má graf funkcie $f(x)$ a funkcie k nej inverznej? (2019/8)

Riešenie:

2 body

12. Zistite definičný obor funkcie $f: y = \log_2 \frac{3x-2}{1-x}$. (2010/26)

- (A) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$
(C) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ (D) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty)$
(E) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

13. Grafy funkcií $f: y = \log(x - 2)$ a $g: y = 2$ sa pretínajú v bode A $[p; q]$. Vypočítajte číslo p . (2014/15)

Výsledok: **102**

14. Vypočítajte koreň rovnice $\log x + \log(x + 3) = 1$. (2013/10)

Výsledok: **2**

15. Vypočítajte koreň rovnice $\log(3x + 12) = \log(5x - 18)$. (2011/1)

Výsledok: **15**

16. Rovnica $\log(x+2) = -\log(x+1)$ v množine \mathbb{R} (2009/23)

- (A) má len jedno záporné riešenie.
(B) má jedno kladné a jedno záporné riešenie.
(C) má dve záporné riešenia.
(D) nemá riešenie.
(E) má len jedno kladné riešenie.

17. Množina všetkých riešení nerovnice $\log(x + 1) > \log(5 - x)$ je interval K . Nájdite tento interval K . (2008A/24)

- (A) $K = (2; 5)$ (B) $K = (1; 5)$ (C) $K = (2; \infty)$ (D) $K = (1; 2)$ (E) $K = (\infty; 2)$

18. Ak $\log_a x = t$, tak (2005A/23)

- (A) $x = a^t$. (B) $x = t^a$. (C) $a = x^t$. (D) $a = t^x$. (E) $t = x^a$.

19. Ak M je množina všetkých $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré nadobúda logaritmická funkcia $f: y = \log_{0,2}(4x - 1)$ kladné funkčné hodnoty, tak $M =$ (2004A/7)
(A) $(0; 0,5)$. (B) $(0,25; 0,5)$. (C) $(0,25; \infty)$. (D) $(0,3; \infty)$. (E) $(0,5; \infty)$.

Riešenie: B

20. Dané sú logaritmické funkcie $g: y = \log_{\frac{1}{4}}x$ a $f: y = \log_4x$. Pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ je súčin $f(x) \cdot g(x)$ funkčných hodnôt týchto dvoch funkcií záporný? (fri 2017/28)
(A) $x \in (0; 1)$ (B) $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ (C) $x \in (-\infty; -1)$ (D) $x \in (1; \infty)$