

# 7. FUNKCIE

## POJEM FUNKCIE

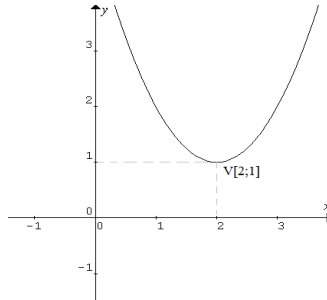
**Funkcia  $f$  reálnej premennej  $x$  je :**

- každé zobrazenie  $f$  v množine všetkých reálnych čísel;
- množina  $f$  všetkých usporiadaných dvojíc  $[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  pre ktorú platí:  
ku každému  $x \in \mathbf{R}$  existuje najviac jedno  $y \in \mathbf{R}$  tak, že  $[x,y] \in f$ .
- predpis  $f$ , ktorý každému  $x \in \mathbf{R}$  priraduje najviac jedno  $y \in \mathbf{R}$  tak, že  $y = f(x)$ .

**Spôsoby zadania funkcie:**

a) rovnicou  $f : y = 3x - 5$

b) grafom



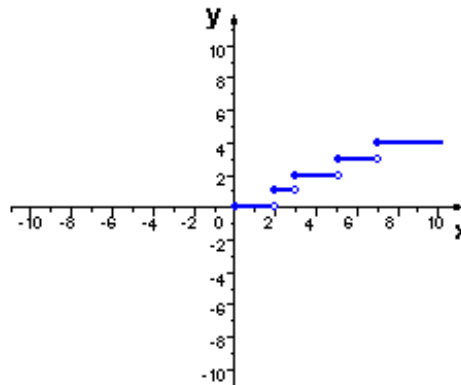
c) tabuľkou

<b>x</b>	<b>-3</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>y</b>	<b>7</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>2</b>	<b>7</b>

d) slovným predpisom

Definujme funkciu  $f$  s definičným oborom  $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$  takto: ku každému číslu  $x \in \langle 0, \infty \rangle$  priradíme také číslo  $y$ , ktoré sa rovná počtu všetkých prvočísel menších alebo rovnajúcich sa číslu  $x$ . Číslo 1 nepovažujeme za prvočíslo. Lahko môžeme určiť usporiadané dvojice, ktoré patria funkcii  $f$ .

Môžeme použiť napríklad aj tabuľku prvočísel, ale nenájdeme rovnicu, ktorá by určovala túto funkciu. V tomto prípade sa musíme pri určení funkcie obmedziť iba na slovný opis funkcie.

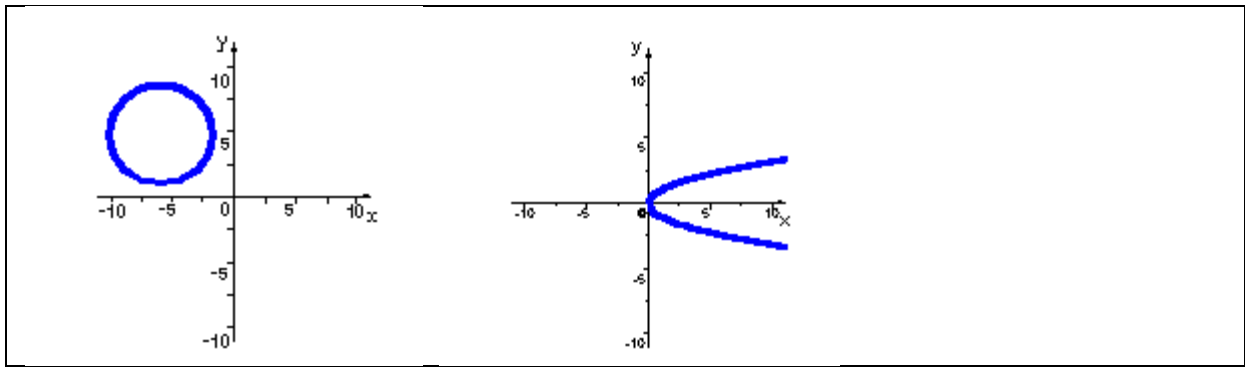


**Čo nie je funkcia?**

Funkciou **nie** je **každá krivka**, ktorá nezodpovedá definícii funkcie.

Zistiť, že krivka nie je funkciou je veľmi jednoduché:

**stačí nájsť také  $x$ , ktorému sme priradili aspoň dve rôzne hodnoty  $y$ .**



1. Rozhodnite, či je to funkcia:

x	1	4	-2	-3	1	2
y	-5	1	-2	1	3	6

x	-4	2	0	4	5	6
y	1	1	1	1	1	1

$$\{[1; -3]; [2; -2]; [3; -1]; [4; 0]; [5; 1]; [6; 2]\}$$

$$\{[1; 3]; [2; 2]; [3; 3]; [4; 2]; [5; 3]; [6; 2]\}$$

$$\{[1; 5]; [2; 4]; [3; 3]; [1; 2]; [2; 1]; [3; 0]\}$$

$$x = y^2 - 6$$

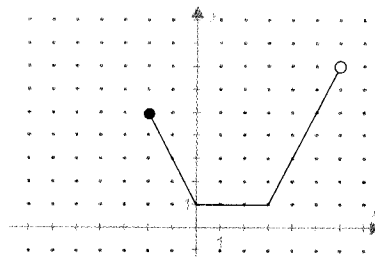
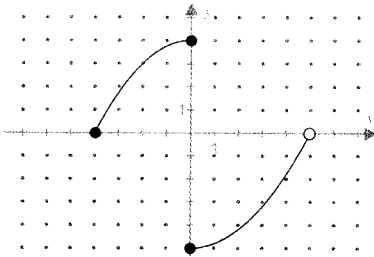
$$y^2 = x$$

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$y = |x^2 + 2|$$

$$y = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$|y| = 2x - 3$$



2. Rovnajú sa nasledujúce funkcie?

$$f_1 : y = \frac{1}{x-1};$$

$$f_2 : y = \frac{x+1}{x^2-1}$$

3. Rozhodnite, či sa dané funkcie rovnajú:

a)  $f : y = 1$        $g : y = \frac{x}{x},$

b)  $f : y = \sqrt{\frac{x^2}{x+2}}$        $g : y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}.$

c)  $f : y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$        $g : y = \frac{x+1}{x-1}$

4. Grafom funkcie  $f: y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$  je (2011/28)

- (A) parabola. (B) parabola bez jedného bodu.  
(C) hyperbola (graf lineárnej lomenej funkcie).  
(D) priamka. (E) priamka bez jedného bodu.

5. Vypočítajte funkčné hodnoty  $f(x)$  pre dané hodnoty premennej, ak je daná funkcia  $f$ .

$$f: y = x^2 - x - 6; \quad f(2) = ? \quad f(-5) = ? \quad f(0) = ?$$

$$f: y = \frac{x}{2x - 4}; \quad f(-1) = ? \quad f(2) = ? \quad f(0) = ?$$

6. Určte funkčné hodnoty  $f(-1)$ ,  $f(2/3)$ ,  $f(1)$  pre funkcie:

a)  $f: y = 2x - 3$       b)  $g: y = \frac{-2}{x - 2}$       c)  $h: y = (x - 1)^2$       d)  $f: y = \frac{3}{\sqrt{x + 2}}$

7. Vypočítajte priesečníky funkcií (z predch. príkladu) so súradnicovým osami.

8. Určte počet priesečníkov grafu funkcie  $f: y = (x^2 - 1) \cdot (4x^2 + 4x + 1)$  so súradnicovou osou  $x$ .

(2005A/13)

9. Daná je funkcia  $f: y = \sqrt{\frac{x - 3}{4 - x}}$ . Určte číslo, v ktorom funkcia  $f$  nadobúda hodnotu 1.

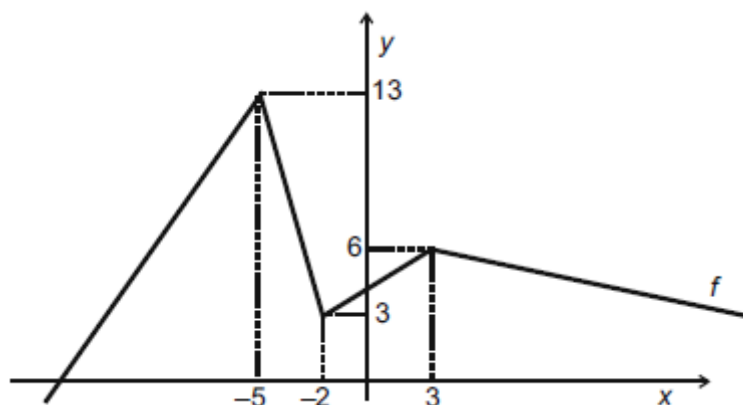
(2012/3)

10. Graf funkcie  $f: y = \frac{x + 8}{x - 4}$  pretína súradnicové osi v bodoch  $A$  a  $B$ . Určte vzdialenosť bodov  $A$  a  $B$ . Výsledok uveďte s presnosťou na dve desatinné miesta. (2009/12)

11. Graf funkcie  $f: y = -\frac{4}{3}x + 8$  pretína súradnicové osi v bodoch  $A$ ,  $B$ . Určte vzdialenosť stredu úsečky  $AB$  od začiatku súradnicovej sústavy. (2008B/16)

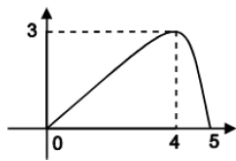
12. Nech  $f(x) = 128 - 2x^3$ . Pre čísla  $a$ ,  $b$  platí  $f(b) = 0$  a zároveň  $f(a) = b$ . Nájdite číslo  $a$ . Výsledok zapíšte s presnosťou na dve desatinné miesta. (2008A/20)

13. Na obrázku je graf funkcie  $f$ . Pre funkciu  $g$  platí  $g(x) = 4 \cdot f(x)$ . Určte maximálnu hodnotu funkcie  $g$ . (2008A/5, 2008B/7)

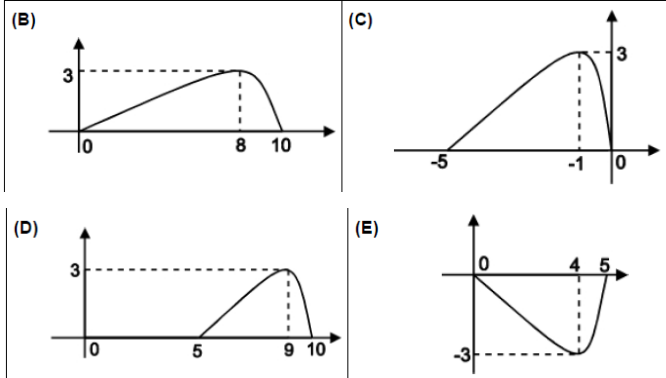


14. Na obrázku je graf funkcie  $y = f(x)$ . Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je graf funkcie  $y = f(x+5)$ . (2005A/28)

Na obrázku je graf funkcie  $y = f(x)$ .



Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je graf funkcie  $y = f(x+5)$ ?



15. Rozhodnite, či platí veta: Dve funkcie sa navzájom rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich definičné obory i obory funkčných hodnôt. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
16. Daná je funkcia  $f: y = 3x - 1, x \in \langle -3, 3 \rangle$ .  
Ktoré z bodov  $[0,-1], [2,5], [5,14], [-6,8], [-2,-8]$  patria grafu tejto funkcie ?

---

## ZÁKLADNÉ TYPY FUNKCIÍ

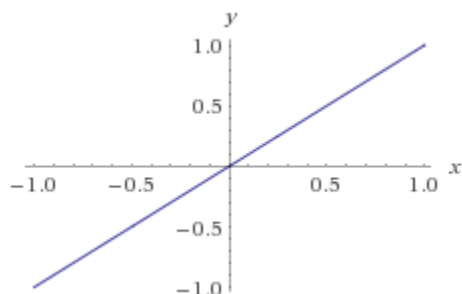
---

### LINEÁRNA A KVADRATICKÁ FUNKCIA

---

1. Na nasledujúcich stranách sú zobrazené grafy všetkých typov funkcií, ktoré má maturant poznať. Odvođením zo základného typu grafu grafy nasledujúcich funkcií:

**Lineárna funkcia  $f: y = x$**



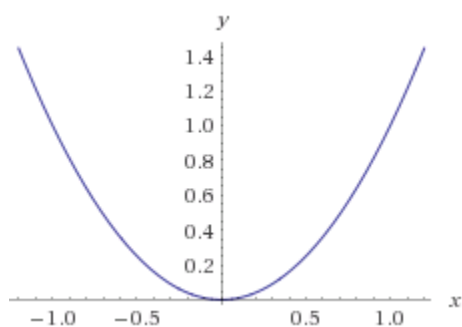
$$f: y = 3x$$

$$y = x - 4$$

$$y = x + 5$$

$$y = -2x + 1$$

**Kvadratická funkcia  $f: y = x^2$**



$$f: y = 3x^2$$

$$y = (x - 4)^2$$

$$y = x^2 + 5$$

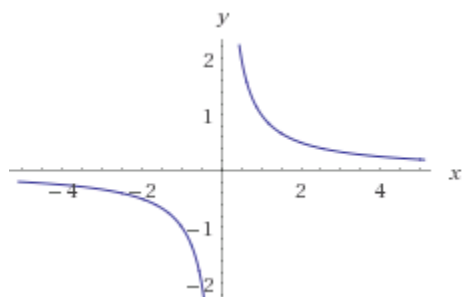
$$y = -2(x - 4)^2 + 1$$

---

### LINEÁRNE LOMENÁ FUNKCIA

---

$$f: y = \frac{1}{x}$$



$$f: y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x - 4}$$

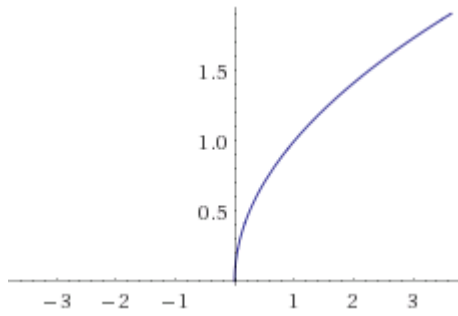
$$y = \frac{1}{x} + 5$$

$$y = -2 \cdot \frac{1}{x - 4} + 1$$

## IRACIONÁLNA FUNKCIA

---

$$f: y = \sqrt{x}$$



$$f: y = 3 \cdot \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x-4}$$

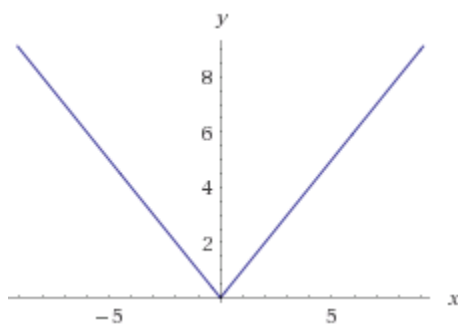
$$y = \sqrt{x} + 5$$

$$y = -2 \cdot \sqrt{x-4} + 1$$

## ABSOLÚTNA HODNOTA

---

$$f: y = |x|$$



$$f: y = 3 \cdot |x|$$

$$y = |x-4|$$

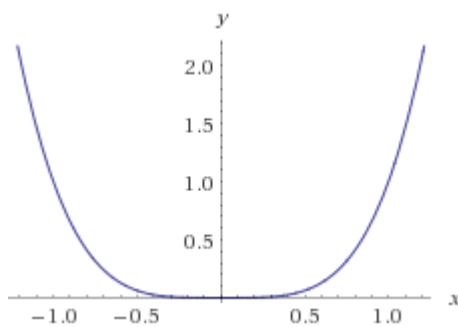
$$y = |x| + 5$$

$$y = -2 \cdot |x-4| + 1$$

## MOCNINOVÉ FUNKCIE

---

Mocninová funkcia  $f: y = x^n$ , pričom  $n$  je **párne**. Napríklad:  $f: y = x^4$



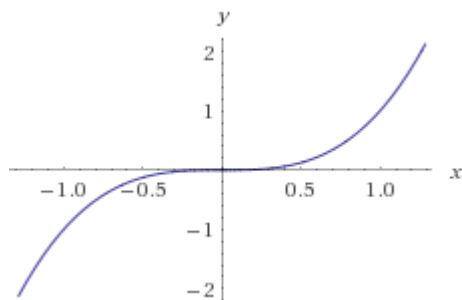
$$f: y = 3 \cdot x^4$$

$$y = (x-4)^4$$

$$y = x^4 + 5$$

$$y = -2 \cdot (x-4)^4 + 1$$

Mocninová funkcia  $f: y = x^n$ , pričom  $n$  je **nepárne** Napríklad:  $f: y = x^3$



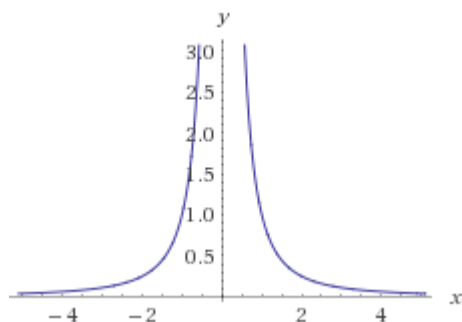
$$f: y = 3 \cdot x^3$$

$$y = (x - 4)^3$$

$$y = x^3 + 5$$

$$y = -2 \cdot (x - 4)^3 + 1$$

Mocninová funkcia  $f: y = x^n$ , pričom  $n$  je **párne a záporné** Napríklad:  $f: y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$



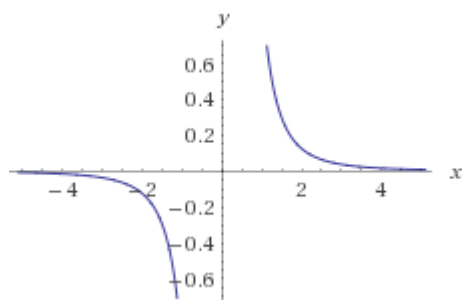
$$f: y = 3 \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$y = \frac{1}{(x-4)^4}$$

$$y = \frac{1}{x^4} + 5$$

$$y = -2 \cdot \frac{1}{(x-4)^4} + 1$$

Mocninová funkcia  $f: y = x^n$ , pričom  $n$  je **nepárne a záporné**. Napríklad  $f: y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$



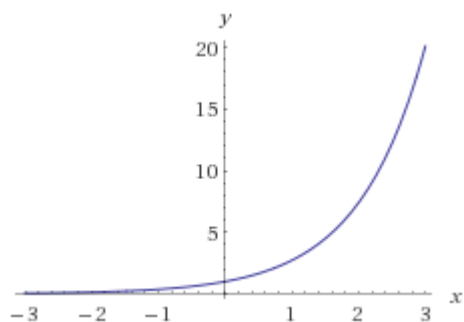
$$f: y = 3 \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{(x-4)^3}$$

$$y = \frac{1}{x^3} + 5$$

$$y = -2 \cdot \frac{1}{(x-4)^3} + 1$$

Exponenciálna funkcia  $y = e^x$



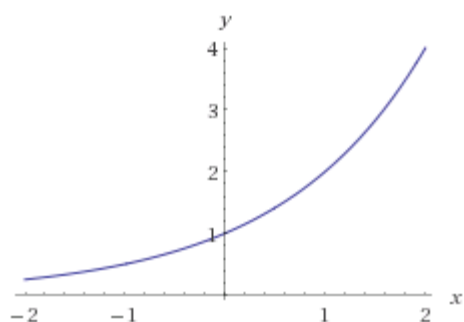
$$f: y = 3 \cdot e^x$$

$$y = e^{x-4}$$

$$y = e^x + 5$$

$$y = -2 \cdot e^{x-4} + 1$$

Exponenciálna funkcia  $y = a^x$ , ak  $a$  je  $> 1$ . Napríklad:  $y = 2^x$



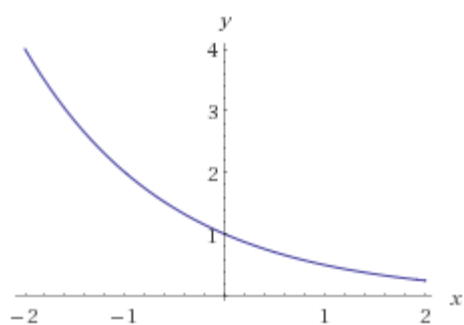
$$f: y = 3 \cdot 2^x$$

$$y = 2^{x-4}$$

$$y = 2^x + 5$$

$$y = -2 \cdot 2^{x-4} + 1$$

Exponenciálna funkcia  $y = a^x$ , ak  $a$  je medzi 0 a 1. Napríklad:  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$$f: y = 3 \cdot 0,5^x$$

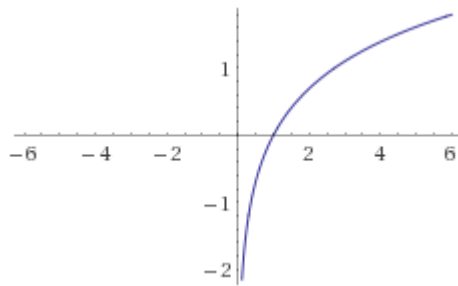
$$y = 0,5^{x-4}$$

$$y = 0,5^x + 5$$

$$y = -2 \cdot 0,5^{x-4} + 1$$



Logaritmická funkcia  $y = \log_a x$ , ak  $a > 1$ . Napríklad:  $y = \log_{10} x$



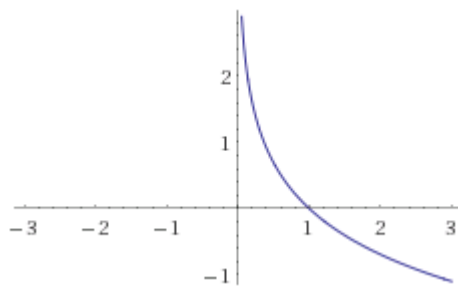
$$f: y = 3 \cdot \log x$$

$$y = \log(x - 4)$$

$$y = \log x + 5$$

$$y = -2 \cdot \log(x - 4) + 1$$

Logaritmická funkcia  $y = \log_a x$ , ak **a je medzi 0 a 1**. Napríklad:  $y = \log_{0,1} x$



$$f: y = 3 \cdot \log_{0,5} x$$

$$y = \log_{0,5}(x - 4)$$

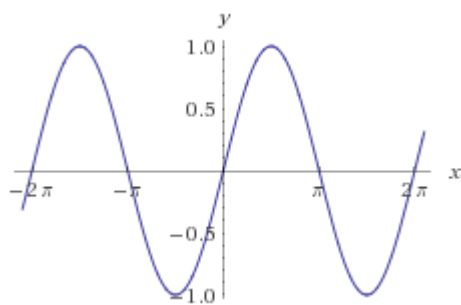
$$y = \log_{0,5} x + 5$$

$$y = -2 \cdot \log_{0,5}(x - 4) + 1$$

Prirodzený logaritmus  $y = \ln x$

Aký bude mať graf?

**Sínus**



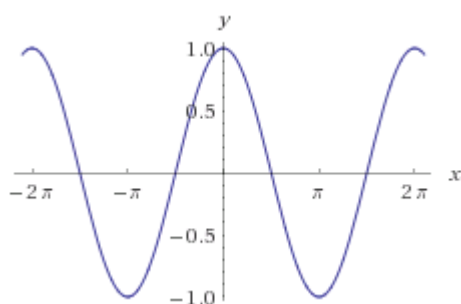
$f: y = 3 \cdot \sin x$

$y = \sin(x - \pi)$

$y = \sin x + 2$

$= -2 \cdot \sin(x - \pi) + 1$

**Kosínus**



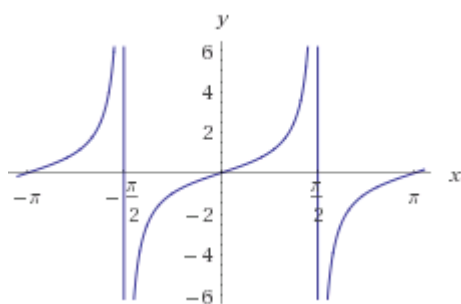
$f: y = 3 \cdot \cos x$

$y = \cos(x - \pi)$

$y = \cos x + 2$

$= -2 \cdot \cos(x - \pi) + 1$

**Tangens**



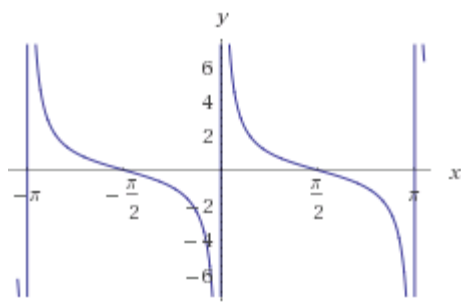
$f: y = 3 \cdot \operatorname{tg} x$

$y = \operatorname{tg}(x - \pi)$

$y = \operatorname{tg} x + 2$

$= -2 \cdot \operatorname{tg}(x - \pi) + 1$

**Kotangens**



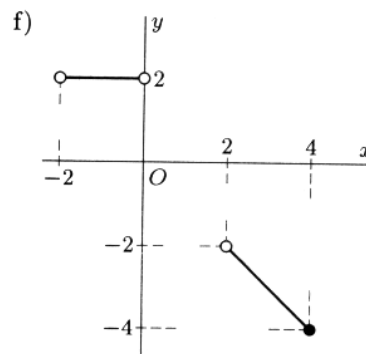
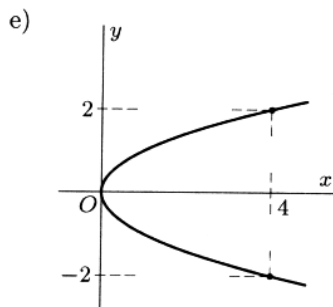
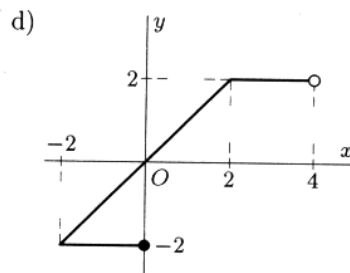
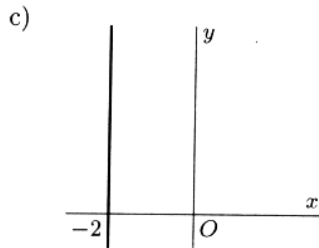
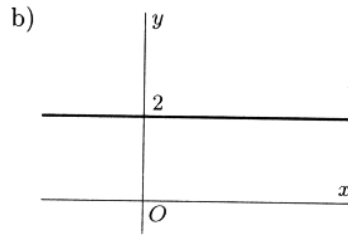
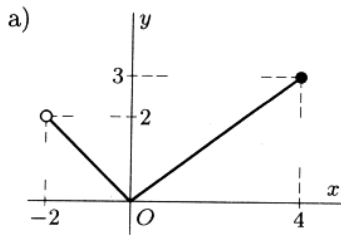
$f: y = 3 \cdot \operatorname{cotg} x$

$y = \operatorname{cotg}(x - \pi)$

$y = \operatorname{cotg} x + 2$

$= -2 \cdot \operatorname{cotg}(x - \pi) + 1$

1. Určte definičný obor a obor hodnôt funkcií: (Ak to nie je funkcia, nemá D(f), ani H(f)!)



2. Určte definičné obory funkcií:

- |                                   |  |  |                                    |
|-----------------------------------|--|--|------------------------------------|
| a) $y = x^3 + 2x$ ,               | b) $y = \sqrt{x}$ ,                          | c) $y = \frac{1}{2x+1}$ ,                  | d) $y = \frac{1}{ x }$ ,           |
| e) $y = \frac{1}{ x -1}$ ,        | f) $y = \frac{1}{ x +x}$ ,                   | g) $y = \frac{x-2}{3-x}$ ,                 | h) $y = \frac{1}{(x-4)(3+x)}$ ,    |
| i) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$ ,     | j) $y = \frac{1}{x^2-5x+6}$ ,                | k) $y = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$ ,            | l) $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{4-x}$ . |
| m) $y = \sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$   | n) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$                     | o) $y = \frac{3x}{x^2-1}$                  | p) $y = \frac{x+3}{x^2+1}$         |
| q) $y = 1 + \sqrt{\log(x^2 - 1)}$ | r) $y = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ | t) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4} + \log(x + 2)$ |                                    |
| s) $y = \log(x^2 + 2x + 3)$       |  |  |                                    |
| u) $y = \sqrt{ x-6 } + 3x$        |  |  |                                    |

3. Zistite definičný obor funkcie  $f: y = \sqrt{\frac{1-x}{x-2}} + 2$ .

(2011/25)

- (A)  $(2;3)$       (B)  $(-\infty;2) \cup (3;\infty)$       (C)  $(-\infty;2) \cup (2;\infty)$   
 (D)  $\langle 3;\infty$       (E)  $(-\infty;2) \cup \langle 3;\infty$

4. Definičný obor funkcie  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+5}}$  je (2008B/23)

- (A)  $D(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$       (B)  $D(f) = \langle 1;\infty$   
 (C)  $D(f) = (-\infty; -5) \cup \langle 1;\infty$       (D)  $D(f) = (-\infty; -5)$   
 (E)  $D(f) = (-5;1)$

5. Určte obory hodnôt týchto funkcií:

- a)  $y = 1 - |x|$       b)  $y = \frac{-2}{|x|}$       c)  $y = 2 - 2^x$       d)  $y = x^2 - 2x + 3$   
 e)  $y = 2 - \frac{1}{2} \sin 2x$       f)  $y = \sqrt{3 - \log 2}$

6. Určte obor hodnôt funkcie  $f(x) = -2 \cdot (x+7)^2 + 5$ , definovanej na intervale  $\langle -12;0 \rangle$ .

- (A)  $H(f) = \langle -93; -45 \rangle$       (B)  $H(f) = \langle -93; 5 \rangle$  (2008A/22)  
 (C)  $H(f) = (-93; -45)$       (D)  $H(f) = (-93; 5)$   
 (E)  $H(f) = \langle -45; 5 \rangle$