

ZBIERKA ÚLOH Z EXTERNEJ MATURITY

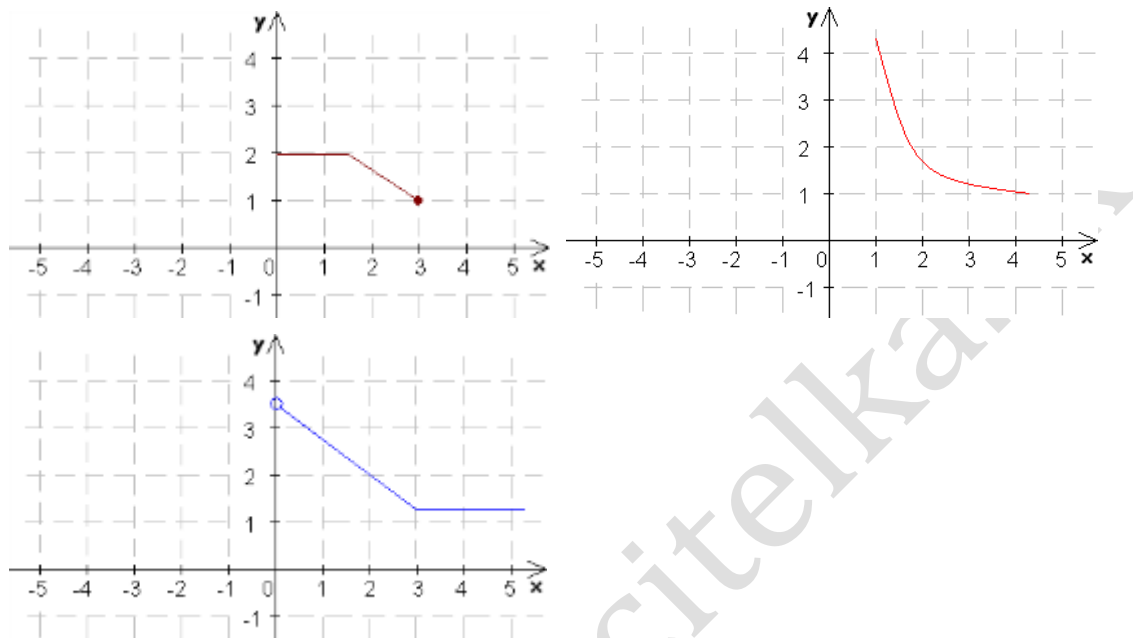
Obsah

Zbierka úloh z externej maturity	1
7. Vlastnosti funkcií	2
Párnosť a nepárnosť funkcie	2
Monotónnosť funkcie.....	3
Ohraničenosť	3
Maximum a minimum.....	4
Periodickosť.....	4
Všetky vlastnosti.....	5
Grafy funkcií.....	7

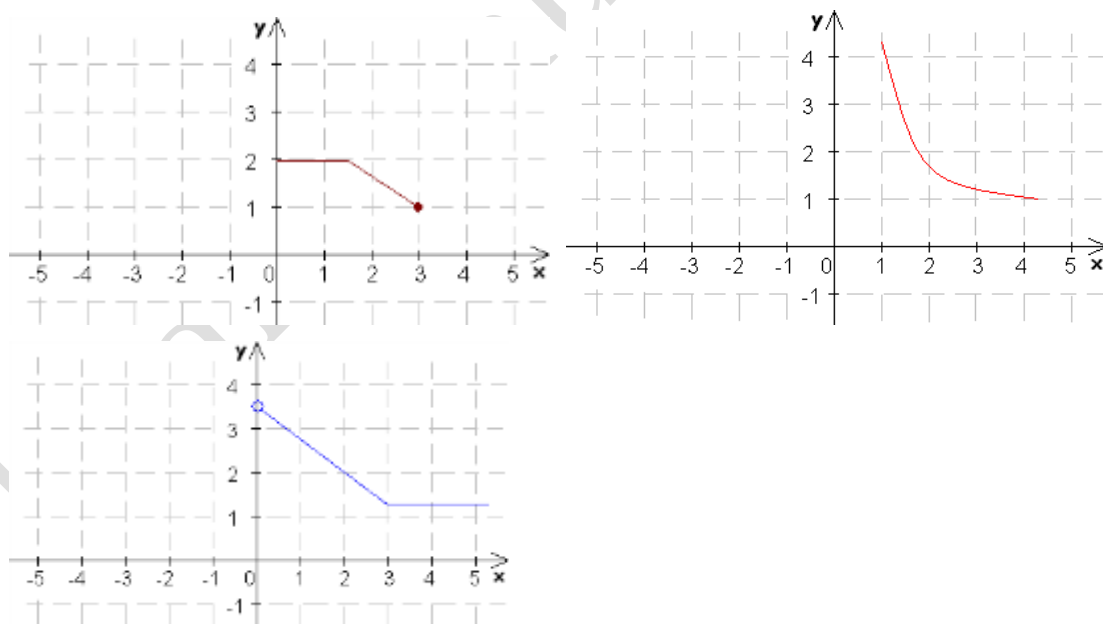
7. VLASTNOSTI FUKCIÍ

PÁRNOSŤ A NEPÁRNOSŤ FUNKCIE

1. Doplňte nasledovné obrázky tak, aby predstavovali grafy párnych funkcií:



2. Doplňte nasledovné obrázky tak, aby predstavovali grafy nepárnych funkcií:



3. Rozhodnite, ktoré z daných funkcií sú párne a ktoré sú nepárne:

a) $y = \frac{|x|}{x}$,

b) $y = \frac{1}{x^6}$,

c) $y = \frac{1}{x^3}$,

d) $y = \frac{x}{x^2+1}$,

e) $y = \frac{1}{x^2}$,

f) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$,

g) $y = x^4 + x^2 - 1$,

h) $y = 5$,

i) $y = -x + 1$, j) $y = x^2 + x$, k) $y = 1 + \sqrt{x}$, l) $y = x + |x|$.

4. Viete nájsť príklad funkcie definovanej na celej množine reálnych čísel, ktorá je párna aj nepárna zároveň. Koľko existuje takých funkcií?

5. Daná je funkcia $f: y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Zistite, či daná funkcia je párna, nepárna.

MONOTÓNNOŠŤ FUNKCIE

6. Dané sú funkcie f_1 až f_6 :

$$f_1: y = -\frac{4}{3}x$$

$$f_4: y = x^3 - 5$$

$$f_2: y = x^2 - x + 5$$

$$f_5: y = \log_2 x$$

$$f_3: y = \frac{x}{x+1}$$

$$f_6: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Vyberte možnosť, v ktorej sú z daných funkcií f_1 až f_6 uvedené len všetky funkcie rastúce na celom svojom definičnom obore. (2013/27)

(A) f_1, f_6

(B) f_2, f_4, f_5

(C) f_2, f_3, f_4

(D) f_3, f_4, f_5

(E) f_4, f_5

7. Funkcia $f: y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ je na intervale $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ klesajúca a na intervale $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$ rastúca.

Nájdite najväčšiu hodnotu tejto funkcie na intervale $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. (2004A/14)

OHRANIČENOSŤ

1. Môže byť funkcia zhora ohraničená a nemať maximum?

2. Koľko maxím (miním) môže mať funkcia?

3. Zistite, ktorá z funkcií a) $y = |x|$, b) $y = -|x|$ je zdola ohraničená, zhora ohraničená, ohraničená.

4. Daná je funkcia $f: y = 2x - 3$. Načrtnite je graf a nájdite príklady podmnožín $D(f)$, na ktorých funkcia f : a) je zhora ohraničená, ale nie je zdola ohraničená, b) je zdola ohraničená, ale nie je zhora ohraničená, c) nie je ani zdola ani zhora ohraničená, d) je ohraničená.

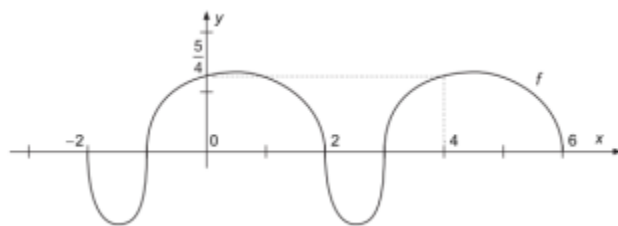
5. Dokážte, že funkcia $f : y = \frac{x}{x+2}, x \in (0, \infty)$ je ohraničená.
6. Ktorá z uvedených funkcií je súčasne párna, zdola ohraničená a zhora neohraničená?
(A) $y = 9 - x^2$ (B) $y = x^3 - 9$ (C) $y = x^2 - 9$ (D) $y = \operatorname{tg} x$ (E) $y = \cos x$
7. Funkcia $f: y = 4 + \sqrt{x-3}$ je na množine $(3; \infty)$
(A) klesajúca, zhora ohraničená, zdola neohraničená
(B) klesajúca, zhora ohraničená, zdola ohraničená
(C) rastúca, zhora neohraničená, zdola neohraničená
(D) rastúca, zhora neohraničená, zdola ohraničená
(E) rastúca, zhora ohraničená, zdola ohraničená
8. Vypočítajte obsah trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníky funkcie $y = 1 - \frac{1}{x+2}$ so súradnicovými osami a bod $[0; 0]$.

MAXIMUM A MINIMUM

9. Rozhodnite, či platia vety:
a) Ak je funkcia rastúca, tak má v niektorom bode definičného oboru maximum alebo minimum.
b) Ak je funkcia ohraničená, tak má v nejakom bode maximum a v nejakom bode minimum.
10. V ktorých bodoch majú nasledujúce funkcie maximum alebo minimum?
a) $y = 2x + 5$, b) $y = -x - 2$, c) $y = -1$, d) $y = 2 \cdot |x|$, e) $y = 2(x-1)^2$, f) $y = 2x^2 - 1$.
11. Určte body, v ktorých má funkcia $y = 1^x + (-1)^x, x \in Z$ a) maximum, b) minimum.

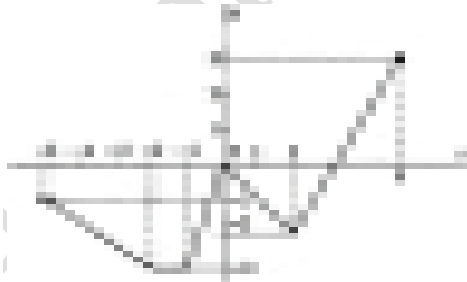
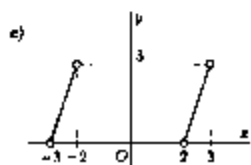
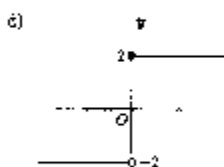
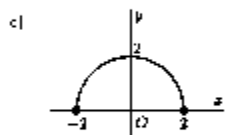
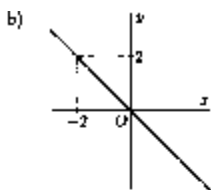
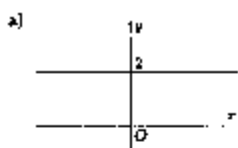
PERIODICKOSŤ

12. Zistite, ktoré z daných funkcií sú periodické, určte ich najmenšiu periódu (ak existuje) a načrtnite grafy: a) $y = 1^x + (-1)^x, x \in Z$, b) $y = (-1)^{2x}, x \in Z$, c) $y = (-1)^{3x}, x \in Z$, d) $y = 2 + (-1)^x, x \in Z$.
13. Určte periódy goniometrických funkcií. Potom určte periódy funkcií, ktorých argument je dvojnásobný oproti základnému argumentu.
14. Na obrázku je časť grafu periodickej funkcie s periódou 4, pre ktorú platí $f(2) = f(3) = f(6) = 0$ a $f(4) = 5/4$. Vypočítajte $f(96)$. (2016/6)



VŠETKY VLASTNOSTI

15. Určte vlastnosti nasledujúcich funkcií:



16. Daná je funkcia $f: y = \frac{3x-2}{x+1}$. Vyberte správne tvrdenie o monotónnosti a ohraničenosti funkcie na intervale $(0; \infty)$. (2015/23)

- (A) Funkcia f je rastúca a len zdola ohraničená na $(0; \infty)$.
- (B) Funkcia f je klesajúca a len zhora ohraničená na $(0; \infty)$.
- (C) Funkcia f je rastúca a ohraničená na $(0; \infty)$.
- (D) Funkcia f je rastúca a nie je ohraničená na $(0; \infty)$.
- (E) Funkcia f je klesajúca a nie je ohraničená na $(0; \infty)$.

17. O istej funkcii f definovanej pre všetky reálne čísla sa zistilo, že rovnica $f(x) = 9$ má práve päť rôznych reálnych koreňov. Z uvedeného vyplýva, že funkcia f

- (A) je ohraničená
- (B) je prostá
- (C) je periodická
- (D) nie je prostá

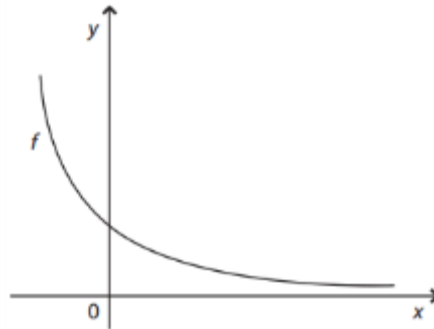
18. Ak je funkcia h _____, potom určite neexistuje inverzná funkcia. Ktoré z uvedených slov možno doplniť na prázdne miesto, aby vzniklo pravdivé tvrdenie?

- A: párna B: rastúca C: ohraničená D: prostá

19. Ktoré z uvedených tvrdení je pravdivé?

- (A) Každá kvadratická funkcia je párna.
- (B) Každá kvadratická funkcia je zdola ohraničená.
- (C) Každá kvadratická rovnica má aspoň jeden nulový bod.
- (D) Oborom hodnôt každej kvadratickej funkcie je množina kladných reálnych čísel.
- (E) Žiadna kvadratická funkcia nie je prostá.

20. Na obrázku je časť grafu funkcie $f: y = 0,5^x$. Rozhodnite o monotónnosti, ohraničenosti a extrémoch funkcie f . (2012/22)



Funkcia f je na celom svojom definičnom obore

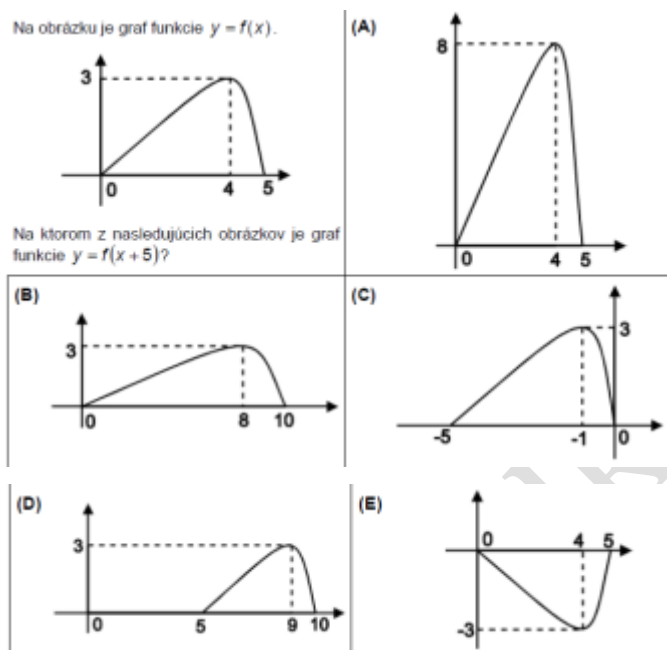
- (A) klesajúca, zdola ohraničená a nemá extrém.
- (B) klesajúca, zdola ohraničená a má minimum.
- (C) klesajúca, ohraničená a má minimum.
- (D) rastúca, zdola ohraničená a má minimum.
- (E) rastúca, ohraničená a nemá extrém.

21. Nech f je funkcia definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Ktoré z uvedených tvrdení je nepravdivé?

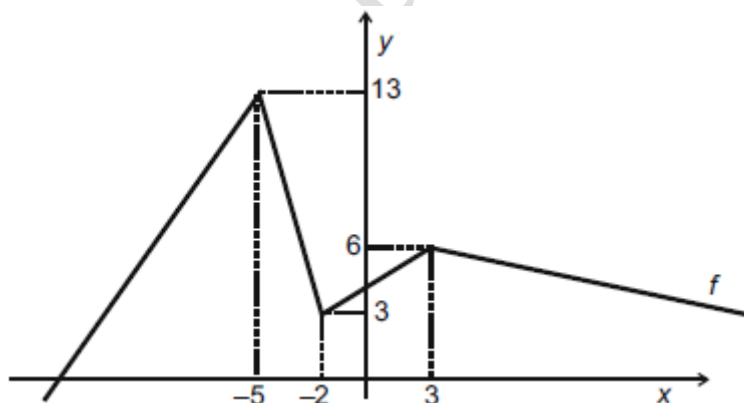
- (A) Ak je funkcia f klesajúca, je prostá.
- (B) Ak je funkcia f periodická, nie je klesajúca.
- (C) Ak je funkcia prostá, nie je periodická.
- (D) Ak je funkcia párna, nie je prostá.
- (E) Ak je funkcia rastúca, je periodická.

GRAFY FUNKCIÍ

1. Na obrázku je graf funkcie $y = f(x)$. Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je graf funkcie $y = f(x+5)$. (2005A/28)



2. Na obrázku je graf funkcie f . Pre funkciu g platí $g(x) = 4 \cdot f(x)$. Určte maximálnu hodnotu funkcie g . (2008A/5, 2008B/7)



3. Rozhodnite, či platí veta: Dve funkcie sa navzájom rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich definičné obory i obory funkčných hodnôt. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
4. Daná je funkcia $f: y = 3x - 1, x \in \langle -3, 3 \rangle$.

Ktoré z bodov $[0,-1], [2,5], [5,14], [-6,8], [-2,-8]$ patria grafu tejto funkcie ?