VLASTNOSTI FUNKCIÍ

TEÓRIA

Funkcia ***f*** je na množine ***M*** :

a) **rastúca** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak $x_1 > x_2$, tak $\boldsymbol{f}(x_1) > \boldsymbol{f}(x_2)$

b) **klesajúca** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak $x_1 > x_2$, tak $\boldsymbol{f}(x_1) < \boldsymbol{f}(x_2)$

c) **nerastúca** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak $x_1 > x_2$, tak $\boldsymbol{f}(x_1) \leq \boldsymbol{f}(x_2)$

d) **neklesajúca** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak $x_1 > x_2$, tak $\boldsymbol{f}(x_1) \geq \boldsymbol{f}(x_2)$

e) **prostá** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak $x_1 \neq x_2$, tak $\boldsymbol{f}(x_1) \neq \boldsymbol{f}(x_2)$

f) **ohraničená zhora** $\Leftrightarrow$ existuje $h \in \boldsymbol{R}$, že $\forall$ x $\in \boldsymbol{M}$ platí $\boldsymbol{f}(x) \leq h$

g) **ohraničená zdola** $\Leftrightarrow$ existuje $d \in \boldsymbol{R}$, že $\forall$ x $\in \boldsymbol{M}$ platí $\boldsymbol{f}(x) \geq d$

h) **ohraničená** $\Leftrightarrow$ je ohraničená zhora a súčasne je ohraničená zdola

Funkcia f má na množine ***M*** v bode a $\in \boldsymbol{M}$:

a) **minimum** $\Leftrightarrow \forall$ x $\in \boldsymbol{M}$ platí $\boldsymbol{f}(x) \geq \boldsymbol{f}(a)$

a) **maximum** $\Leftrightarrow \forall$ x $\in \boldsymbol{M}$ platí $f(x) \leq \boldsymbol{f}(a)$

Funkcia ***f*** je **párna** $\Leftrightarrow \forall$ x $\in \mathbf{D}(f)$ aj - x $\in \mathbf{D}(f)$ a súčasne

$\forall$ x $\in \mathbf{D}(f)$ je $\boldsymbol{f}(-x) = \boldsymbol{f}(x)$

Funkcia ***f*** je **nepárna** $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{D}(f)$ aj -x $\in \mathbf{D}(f)$ a súčasne

$\forall x \in \mathbf{D}(f)$ je $\boldsymbol{f}(-x) = -\boldsymbol{f}(x)$

Graf funkcie: párnej je súmerný podľa osi y

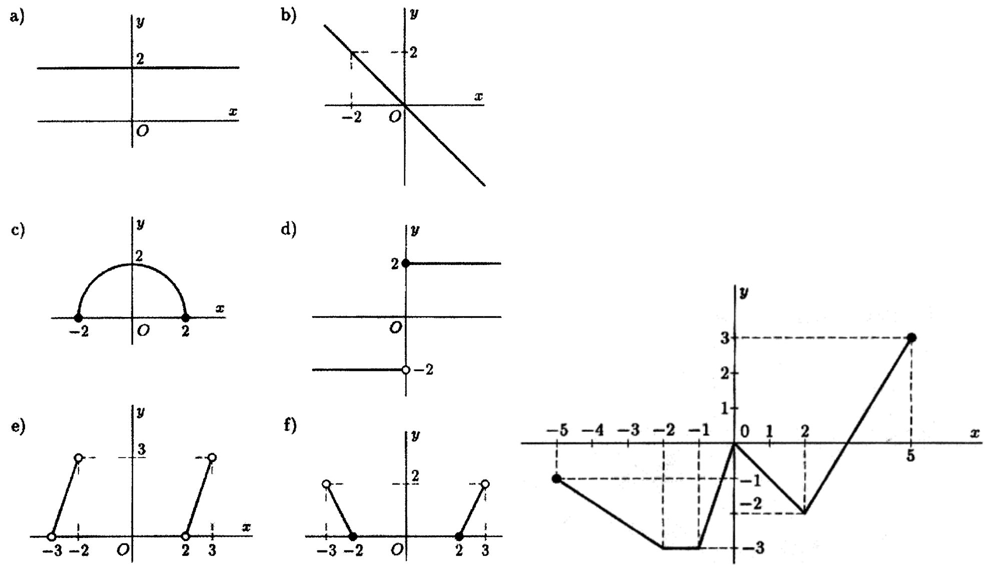
nepárnej podľa začiatku súradnicovej sústavy

Funkcia ***f*** je **periodická** $\Leftrightarrow \exists p > 0$ tak, že $\forall$ x $\in \mathbf{D}(f)$ a $\forall k \in Z$ aj $x + kp \in \mathbf{D}(f)$

a súčasne $\forall$x platí: $f(x+kp) = f(x)$.

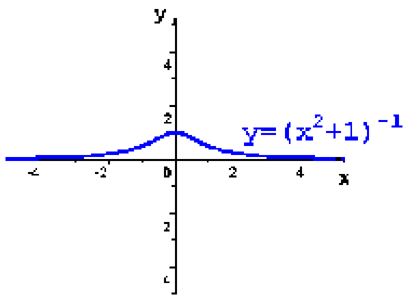
Číslo p sa nazýva **perióda funkcie**.

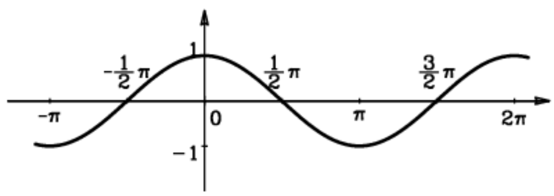
1. Určte vlastnosti nasledujúcich funkcií:



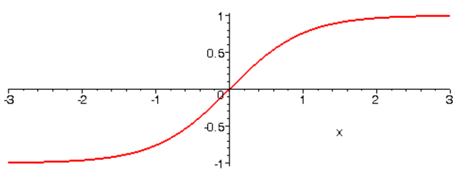
PÁRNOSŤ A NEPÁRNOSŤ FUNKCIE

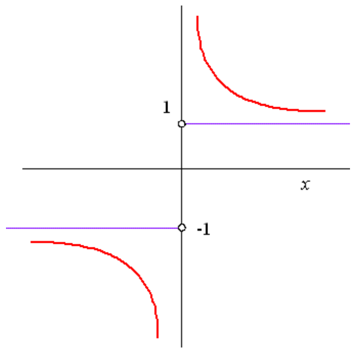
párna





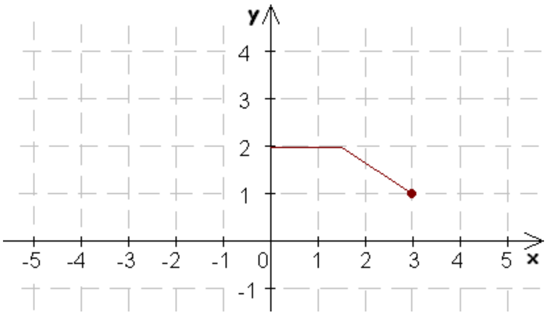
nepárna

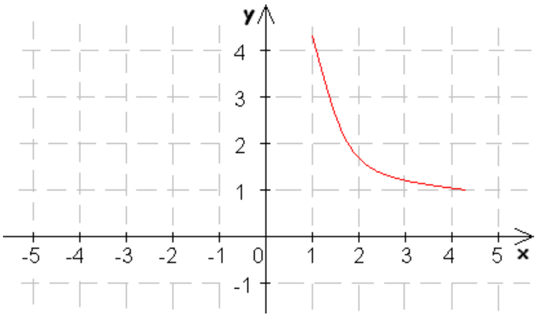


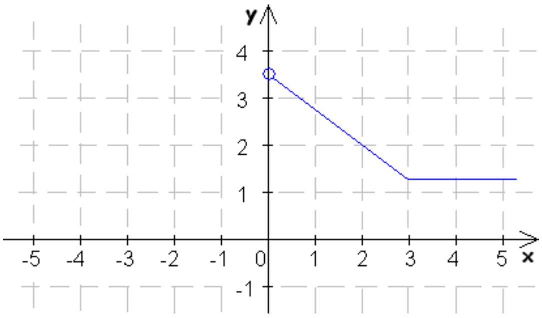


 Zotriedila: Mgr. Dana Kozáková

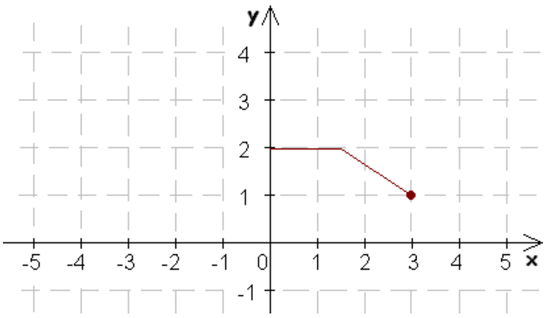
2. Doplňte nasledovné obrázky tak, aby predstavovali grafy párnych funkcií:

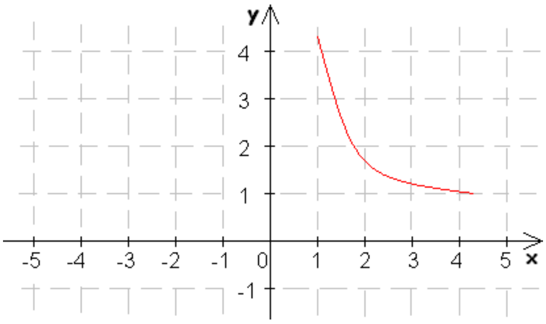


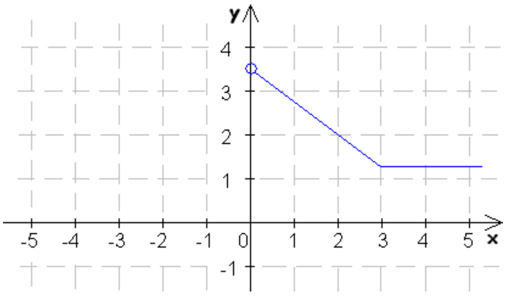




3. Doplňte nasledovné obrázky tak, aby predstavovali grafy nepárnych funkcií:







4. Rozhodnite, ktoré z daných funkcií sú párne a ktoré sú nepárne:

a) $y = \frac{|x|}{x}$, b) $y = \frac{1}{x^6}$, c) $y = \frac{1}{x^3}$, d) $y = \frac{x}{x^2+1}$,

e) $y = \frac{1}{x^2}$, f) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$, g) $y = x^4 + x^2 - 1$, h) $y = 5$,

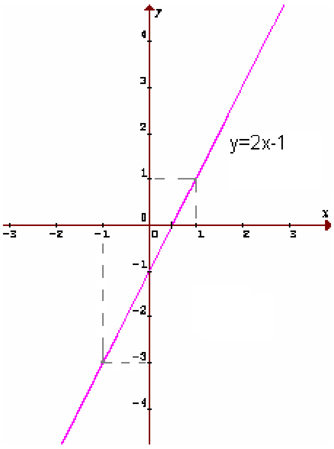
i) $y = -x + 1$, j) $y = x^2 + x$, k) $y = 1 + \sqrt{x}$, l) $y = x + |x|$.

5. Viete nájsť príklad funkcie definovanej na celej množine reálnych čísel, ktorá je párna aj nepárna zároveň. Koľko existuje takých funkcií?

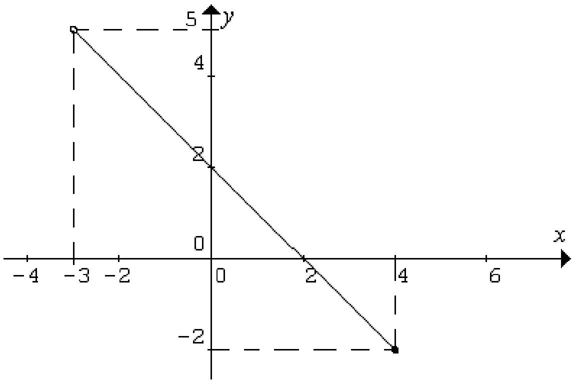
6. Daná je funkcia f: $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. Zistite, či daná funkcia je párna, nepárna.

MONOTÓNNOSŤ

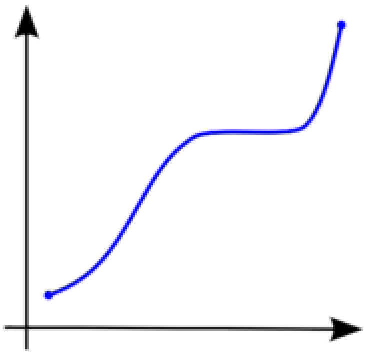
rastúca



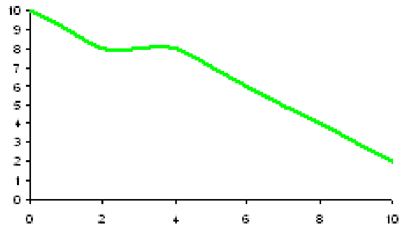
klesajúca



neklesajúca

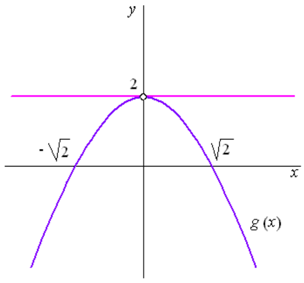


nerastúca

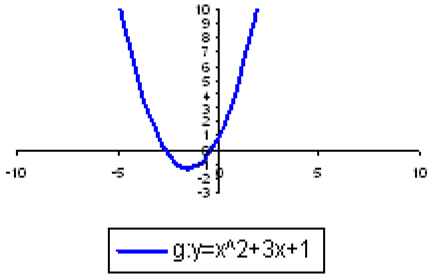


7. Spomedzi zadaných funkcií vybertie tie, ktoré sú rastúce na celom svojom definičnom obore... (2013/27)
8. Najdite maximum funkcie na intervale ... (2004A/14)

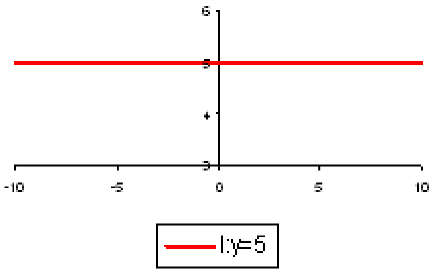
ohraničená zhora

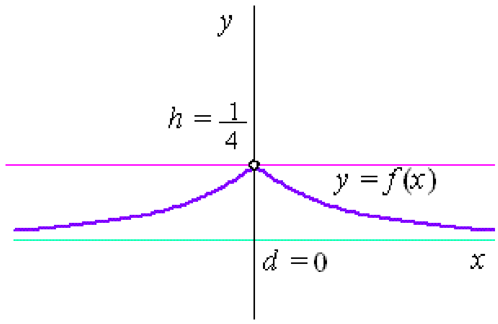


ohraničená zdola



ohraničená





9. Môže byť funkcia zhora ohraničená a nemať maximum?
10. Koľko maxím (miním) môže mať funkcia?
11. Zistite, ktorá z funkcií a) $y=|x|$, b) $y=-|x|$ je zdola ohraničená, zhora ohraničená, ohraničená.
12. Daná je funkcia $f: y=2x-3$. Načrtnite je graf a nájdite príklady podmnožín *D*(*f*), na ktorých funkcia *f*: a) je zhora ohraničená, ale nie je zdola ohraničená,b) je zdola ohraničená, ale nie je zhora ohraničená, c) nie je ani zdola ani zhora ohraničená, d) je ohraničená.
13. Dokážte, že funkcia $f: y=\frac{x}{x+2}$, $x \in \langle 0, \infty)$ je ohraničená.
14. Ktorá z uvedených funkcií je súčasne párna, zdola ohraničená a zhora neohraničená?

    (A) $y = 9 - x^2$ (B) $y = x^3 - 9$ (C) $y = x^2 - 9$ (D) $y = \text{tg}\, x$ (E) $y = \cos x$

15. Funkcia $f: y=4+\sqrt{x-3}$ je na množine $\langle 3;\infty)$

    (A) klesajúca, zhora ohraničená, zdola neohraničená

    (B) klesajúca, zhora ohraničená, zdola ohraničená

    (C) rastúca, zhora neohraničená, zdola neohraničená

    (D) rastúca, zhora neohraničená, zdola ohraničená

    (E) rastúca, zhora ohraničená, zdola ohraničená

MAXIMUM A MINIMUM

16. Rozhodnite, či platia vety:

    a) Ak je funkcia rastúca, tak má v niektorom bode definičného oboru maximum alebo minimum.

    b) Ak je funkcia ohraničená, tak má v nejakom bode maximum a v nejakom bode minimum.

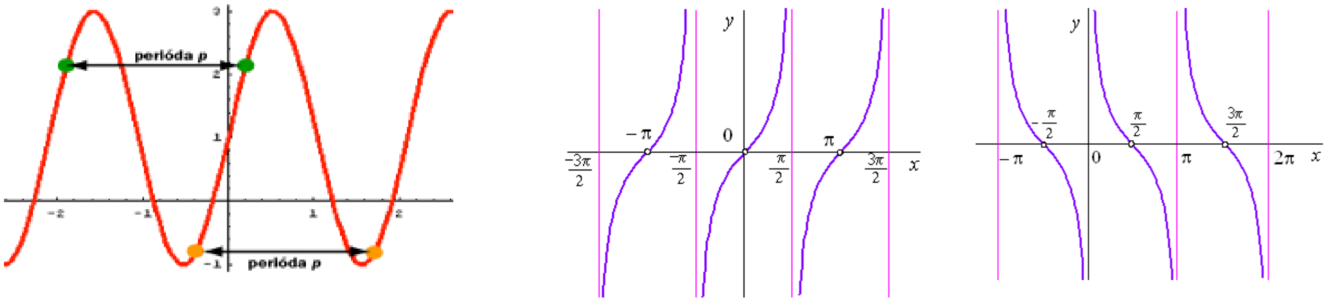
17. V ktorých bodoch majú nasledujúce funkcie maximum alebo minimum?

    a) $y = 2x + 5$, b) $y = -x - 2$, c) $y = -1$, d) $y = 2|x|$, e) $y = 2(x-1)^2$, f) $y = 2x^2 - 1$.

18. Určte body, v ktorých má funkcia $y = 1^x + (-1)^x$, $x \in Z$ a) maximum, b) minimum.

PERIODICKOSŤ

periodická



19. Zistite, ktoré z daných funkcií sú periodické, určte ich najmenšiu periódu (ak existuje) a načrtnite grafy: a) $y = 1^x + (-1)^x$, $x \in Z$, b) $y = (-1)^{2x}$, $x \in Z$, c) $y = (-1)^{3x}$, $x \in Z$, d) $y = 2 + (-1)^x$, $x \in Z$.

20. Určte periódy goniometrických funkcií. Potom určte periódy funkcií, ktorých argument je dvojnásobný oproti základnému argumentu.

VŠETKY VLASTNOSTI

21. O istej funkcii f definovanej pre všetky reálne čísla sa zistilo, že rovnica f(x)=9 má práve päť rôznych reálnych koreňov. Z uvedeného vyplýva, že funkcia f

    A: je ohraničená B: je prostá C: je periodická D: nie je prostá

22. Ak je funkcia h ________________, potom určite neexistuje inverzná funkcia. Ktoré z uvedených slov možno doplniť na prázdne miesto, aby vzniklo pravdivé tvrdenie?

    A: párna B: rastúca C: ohraničená D: prostá

23. Ktoré z uvedených tvrdení je pravdivé?

(A) Každá kvadratická funkcia je párna.

(B) Každá kvadratická funkcia je zdola ohraničená.

(C) Každá kvadratická rovnica má aspoň jeden nulový bod.

(D) Oborom hodnôt každej kvadratickej funkcie je množina kladných reálnych čísel.

(E) Žiadna kvadratická funkcia nie je prostá.

24. Rozhodnite o ohraničenosti a extrémoch funkcie... (2012/22)