LIMITA Polynómy $x \to$ číslo

① $\lim_{x \to 1} (2x+1) = [2 \cdot 1 + 1 = 3]$ → len dosadenie

$= 2 \cdot 1 + 1 = \underline{\underline{3}}$

② $\lim_{x \to 5} \frac{x+4}{3} = \left[\frac{5+4}{3} = \frac{9}{3} = 3\right] = \underline{\underline{3}}$ len dosadenie

③ $\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x^2 + x - 1) = [2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 1] = 8 - 8 + 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$

len dosadenie

④ $\lim_{x \to (-1)} (x^4 + x^2 - x) = [(-1)^4 + (-1)^2 - (-1)] = 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}}$

len dosadenie

⑤ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left[\frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} \to \text{nedefinované}\right]$ dosadenie nestačí

↳ v čitateli = 0, v menovateli = 0 } → rozložiť na súčin a bude možné zlomok krátiť

VZOREC: $A^2 - B^2 = (A-B) \cdot (A+B)$

$x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2)$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+2) = [2+2=4] = \underline{\underline{4}}$

↑ dosadenie už vedie k riešeniu

⑥ $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \left[\frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}\right] \to$ nedefinované

VZOREC $A^2 - B^2 = (A-B) \cdot (A+B)$

$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} (x+3) = [3+3=6] = \underline{\underline{6}}$

⑦ $\lim_{x \to -1} \frac{3x^2-3}{x+1} = \left[\frac{3 \cdot (-1)^2 - 3}{(-1)+1} = \frac{0}{0}\right]$

VZOREC $A^2 - B^2$ plus vyňatie pred zátvorku $3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1) \cdot (x-1)$

$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2-3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{3\cancel{(x+1)} \cdot (x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \to -1} 3\underline{(x-1)} = [3(-1-1) = -6] = \underline{\underline{-6}}$

Je to pre Teba užitočné a oceníš ďalšie takéto materiály? Pomôcť mi môžeš príspevkom mi kávu cez https://www.buymeacoffee.com/hodinova.

(8.) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4} = \left[\dfrac{2^2-2.2}{2^2-4} = \dfrac{0}{0}\right]$ čitateľ → vyňatie pred zátvorku

menovateľ → A^2-B^2

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x.\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x+2} = \left[\dfrac{2}{2+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\right] = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

(9.) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{2(x^2-1)} = \left[\dfrac{(-1)^2+(-1)}{2((-1)^2-1)} = \dfrac{0}{0}\right]$ čitateľ → vyňatie pred zátvorku

menovateľ → A^2-B^2

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x.\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}.(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{2.(x-1)} = \left[\dfrac{-1}{2(-1-1)} = \dfrac{-1}{-4}\right]$

$= \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$

(10.) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \left[\dfrac{1^2-1}{1^2-3.1+2} = \dfrac{0}{0}\right]$ čitateľ → vzorec A^2-B^2

menovateľ → Vietove vzťahy

$x^2-3x+2 = (x-2)\cdot(x-1)$

$-2+(-1)$ $\quad (-2).(-1)$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}.(x+1)}{(x-2).\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-2} = \left[\dfrac{1+1}{1-2}\right] = \underline{\underline{-2}}$

(11.) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x-21} = \left[\dfrac{3^2-2.3-3}{3^2+4.3-21}\right]$

čitateľ → Vietove vzťahy

$x^2-2x-3 = (x-3).(x+1)$

$-3+1$ $\quad -3.1$

menovateľ → Vietove vzťahy

$x^2+4x-21 = (x+7)(x-3)$

$7-3$ $\quad 7.(-3)$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}.(x+1)}{(x+7).\cancel{(x-3)}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x+7} =$

$= \left[\dfrac{3+1}{3+7} = \dfrac{4}{10}\right] = \underline{\underline{\dfrac{2}{5}}}$

(12.) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \left[\dfrac{2^2-4}{2^2-3.2+2} = \dfrac{0}{0}\right]$ vzorec A^2-B^2

Vietove vzťahy

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = \left[\dfrac{2+2}{2-1}\right] = \underline{\underline{4}}$

(13.) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \left[\dfrac{3^2-4}{3^2-3.3+2} = \dfrac{5}{2}\right] = \underline{\underline{\dfrac{5}{2}}}$ len dosadenie

(14.) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \left[\dfrac{1^2-4}{1^2-3.1+2} = \dfrac{-3}{0} \to ? \begin{matrix} +\infty \\ alebo \\ -\infty \end{matrix}\right]$

treba preskúmať, či je 0 kladná alebo záporná

ak „ideme" do x zľava $x \to 1^-$: $x^2-3x+2 = \underbrace{\underbrace{(x-2)}_{1-2 = -1}\underbrace{(x-1)}_{0^-}}_{0^+}$ „záporná 0"

ak „ideme" do x sprava $x \to 1^+$: $x^2-3x+2 = \underbrace{\underbrace{(x-2)}_{1-2 = -1} \cdot \underbrace{(x-1)}_{0^+}}_{0^-}$ „kladná 0"

zľava je limita
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

sprava je limita
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

zľava ≠ sprava ⇒ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ = neexistuje

Pozn.: aj tu sme mohli limitu zjednodušiť na $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1}$, ale ďalšia úvaha by bola rovnaká

(15.) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^3+x^2-x-2} = \left[\dfrac{(-1)^2+(-1)-2}{2\cdot(-1)^3+(-1)^2-(-1)-2}\right] = \dfrac{-2}{-2} = \underline{\underline{1}}$

(16.) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^3+x^2-x-2} = \left[\dfrac{1^2+1-2}{2\cdot 1^3+1^2-1-2} = \dfrac{0}{0}\right]$

VIETOVE VZŤAHY
a
DELENIE POLYNÓMOM

$x^2+x-2 = (x+2)\cdot(x-1)$

$+2-1 \quad 2\cdot(-1)$

keďže 1 po dosadení → 0 ⇒ dá sa deliť (x-1)

$2x^3+x^2-x-2 : (x-1) = 2x^2+3x+2$

$-2x^3+2x^2$

$3x^2-x$

$-3x^2+3x$

$2x-2$

$\Downarrow$

$2x^3+x^2-x+2 = (x-1)\cdot(2x^2+3x+2)$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(2x^2+3x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{2x^2+3x+2} = \left[\dfrac{1+2}{2\cdot 1^2+3\cdot 1+2}\right] = \dfrac{3}{7}$

Pozn/ Tento (ale aj všetky príklady s polynómmi) možno jednoduchšie počítať s pomocou L'Hospitalovho pravidla

---

(17.) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8} = \left[\dfrac{4^2+7\cdot 4-44}{4^2-6\cdot 4+8} = \dfrac{0}{0}\right]$

VIETOVE VZŤAHY
! jeden člen musí byť (x-4)

$x^2+7x-44 = (x-4)(x+11)$

$-4+11 \quad -4\cdot 11$

$x^2-6x+8 = (x-4)\cdot(x-2)$

$-4-2 \quad -4\cdot(-2)$

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}\cdot(x+11)}{\cancel{(x-4)}\cdot(x-2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+11}{x-2} = \left[\dfrac{4+11}{4-2} = \dfrac{15}{2}\right] = \dfrac{15}{2}$

18\. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2} = \left[\dfrac{1^3-4\cdot1^2+5\cdot1-2}{1^5-3\cdot1+2} = \dfrac{0}{0}\right]$

DELENIE POLYNÓMOV $:(x-1)$

$$(x^3-4x^2+5x-2):(x-1) = x^2-3x+2$$

$$\begin{array}{l} -x^3+x^2 \\ \hline \quad -3x^2+5x \\ \quad +3x^2-3x \\ \hline \qquad 2x-2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x^3-4x^2+5x-2 = (x-1)\cdot(x^2-3x+2)$$

$$(x^5-3x+2):(x-1) = x^4+x^3+x^2+x-2$$

$$\begin{array}{l} -x^5+x^4 \\ \hline \quad x^4 \\ \quad -x^4+x^3 \\ \hline \qquad x^3 \\ \qquad -x^3+x^2 \\ \hline \qquad\quad x^2-3x \\ \qquad\quad -x^2+x \\ \hline \qquad\qquad -2x+2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x^5-3x+2 = (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x-2)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2-3x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^4+x^3+x^2+x-2)} = \left[\frac{1^2-3\cdot1+2}{1^4+1^3+1^2+1-2}\right] =$$

$$= \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

19\. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x^4-1}\right) = \left[\dfrac{1}{1-1} - \dfrac{2}{1-1} = \dfrac{1}{0} - \dfrac{2}{0}\right]$

ÚPRAVA ZLOMKOV NA SPOLOČNÝ MENOVATEĽ

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x^2-1)} - \frac{2}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{1\cdot(x^2+1)-2}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+1} = \left[\frac{1}{1^2+1}\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

20. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{3}{0}\right]=$$

ÚPRAVA NA SPOLOČNÝ MENOVATEĽ

$$\cancel{=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3-3+3x}{(1-x)}}$$

NAJPRV ROZKLAD

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\cdot(1^2+1\cdot x+x^2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot(1+x+x^2)-3}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\left[\frac{1^2+1-2}{(1-1)\cdot(1+1+1)}=\frac{0}{0}\right]$$

VIETOVE VZŤAHY $x^2+x-2=(x-1)\cdot(x+2)$

$-1+2 \quad -1\cdot 2$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{\underbrace{\cancel{(1-x)}}_{-1}\cdot(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}-\frac{(x+2)}{1+x+x^2}=\left[-\frac{1+2}{1+1+1^2}\right]=\underline{\underline{-1}}$$

(x-1) a (1-x) sú opačné, teda zostane -1 po krátení

---

21. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}=\left[\frac{(1+3\cdot 0)^4-(1+4\cdot 0)^3}{0^2}=\frac{0}{0}\right]$$

ÚPRAVA POLYNÓMU = UMOCNENIE

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+4\cdot 1^3\cdot 3x+6\cdot 1^2(3x)^2+4\cdot 1^1(3x)^3+(3x)^4-(1^3+3\cdot 1^2\cdot 4x+3\cdot 1(4x)^2+(4x)^3)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+12x+54x^2+108x^3+81x^4-1-12x-48x^2-64x^3}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2+44x^3+81x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\cdot(6+44x+81x^2)}{\cancel{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(6+44x+81x^2)=[6+44\cdot 0+81\cdot 0]=\underline{\underline{6}}$$